PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 2. | 15. Januar 1919. | 20. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 3 am 16. Januar 1919.

INHALT:

Originalmitteilungen:
W. Pauli jun., Über die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes. S. 25.
R. Holm, Zwei Staugeräte. S. 27.
H. Weyl, Über die statischen kugelsymmetrischen Lösungen von Einsteins „kosmologischen" Gravitationsgleichungen. S. 31.

Zusammenfassende Bearbeitungen:
F. Henning, Grundlagen und Methoden der Pyrometrie. S. 34.

Besprechungen:
G. Bucky, Die Röntgenstrahlen und ihre Anwendung. S. 47.
J. Rosenthal, Die Röntgentechnik. S. 47.
W. Schüle, Leitfaden der technischen Wärmelehre. S. 47.
W. Ostwald, Die wissenschaftlichen Grundlagen der analytischen Chemie. S. 47.
G. Duffing, Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. S. 47.

Personalien. S. 48.

Gesuche. S. 48.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes.

Von Wolfgang Pauli jun.

Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes sind bisher bloß für den Spezialfall $g = -1$ explizite berechnet worden, aber nicht für ein beliebiges Koordinatensystem. Diese Lücke soll durch das Folgende ausgefüllt werden. Die t_i^k sind durch die Gleichungen definiert

$$t_i^k = \frac{\mathfrak{t}_i^k}{\sqrt{-g}}. \qquad (1)$$

$$2\varkappa\, \mathfrak{t}_i^k = \mathfrak{G}^* \delta_i^k - \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_k^{\mu\nu}} \cdot g_i^{\mu\nu}\,{}^{1)} \qquad (2)$$

$$\mathfrak{G}^* = \sqrt{-g}\, G^* \qquad (3)$$

$$G^* = g^{\alpha\beta}\left(\genfrac\{\}{0pt}{}{\alpha s}{r} \genfrac\{\}{0pt}{}{\beta r}{s} - \genfrac\{\}{0pt}{}{\alpha\beta}{r} \genfrac\{\}{0pt}{}{rs}{s} \right). \qquad (4)$$

Um $\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_k^{\mu\nu}}$ zu berechnen, gehen wir aus von der Formel

$$\left.\begin{aligned} \delta\mathfrak{G}^* = \genfrac\{\}{0pt}{}{\mu s}{s} \delta \frac{\partial (g^{\mu k}\sqrt{-g})}{\partial x_k} - \\ \genfrac\{\}{0pt}{}{\mu\nu}{k} \delta \frac{\partial (g^{\mu\nu}\sqrt{-g})}{\partial x_k} + V_{\mu\nu}\,\delta(\sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu}),{}^{2)} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

die man auch schreiben kann

$$\left.\begin{aligned} \delta\mathfrak{G}^* = \left[\frac{1}{2}\genfrac\{\}{0pt}{}{\mu s}{s}\delta_\nu^k + \frac{1}{2}\genfrac\{\}{0pt}{}{\nu s}{s}\delta_\mu^k - \genfrac\{\}{0pt}{}{\mu\nu}{k}\right] \\ \delta \frac{\partial (g^{\mu\nu}\sqrt{-g})}{\partial x_k} + V_{\mu\nu}\,\delta(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}). \end{aligned}\right\} \qquad (5')$$

Darin bedeuten die $V_{\mu\nu}$ gewisse Funktionen der $g_{\mu\nu}$ und der $g_k^{\mu\nu}$, die uns nicht näher interessieren. Bezeichnen wir den Ausdruck in der eckigen Klammer für den Moment mit $K_{\mu\nu}^k$, so wird

$$\delta\mathfrak{G}^* = \left(K_{\mu\nu}^k\sqrt{-g} - \frac{1}{2}K_{\alpha\beta}^k \cdot g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\right)\delta g_k^{\mu\nu} + \\ + (\ldots.)\,\delta\sqrt{-g} + (\ldots.)\,\delta g^{\mu\nu},$$

also nach (2) und (1)

$$2\varkappa\, t_i^k = G^*\delta_i^k - \left(K_{\mu\nu}^k - \frac{1}{2}K_{\alpha\beta}^k g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}\right) g_i^{\mu\nu} \qquad (6)$$

oder ausgerechnet

$$\left.\begin{aligned} 2\varkappa\, t_i^k = G^*\delta_i^k - \genfrac\{\}{0pt}{}{\mu s}{s} g_i^{\mu k} + \genfrac\{\}{0pt}{}{\mu\nu}{k} g_i^{\mu\nu} + \\ + \frac{1}{2}\genfrac\{\}{0pt}{}{\alpha s}{s} g^{\alpha k} g_{\mu\nu} g_i^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\genfrac\{\}{0pt}{}{\alpha\beta}{k} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} g_i^{\mu\nu} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Das ist der allgemeine Ausdruck für die Energiekomponenten. Im Spezialfall $g = -1$ geht er in den von Einstein[1]) angegebenen über. Es ist dann nämlich

$$\genfrac\{\}{0pt}{}{rs}{s} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_r} = 0$$

und daher fällt das zweite Glied in (4), sowie das zweite, vierte und fünfte Glied in (7) weg. Substituiert man außerdem für $g_i^{\mu\nu}$ den Wert

$$g_i^{\mu\nu} = -\genfrac\{\}{0pt}{}{is}{\mu} g^{s\nu} - \genfrac\{\}{0pt}{}{is}{\nu} g^{s\mu},{}^{2)}$$

so erhält man

$$\left.\begin{aligned} 2\varkappa\, t_i^k = g^{\alpha\beta}\genfrac\{\}{0pt}{}{\alpha s}{r}\genfrac\{\}{0pt}{}{\beta r}{s}\delta_i^k - \\ - 2\genfrac\{\}{0pt}{}{\mu\nu}{k}\genfrac\{\}{0pt}{}{is}{\mu} g^{s\nu}, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

w. z. b. w.

Interessanter ist der Spezialfall, daß die $g^{\mu\nu}$ sich nur unendlich wenig von den $-\delta_{\mu\nu}$ unterscheiden, und daß die Gleichungen gelten

1) A. Einstein, Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie, Berliner Sitzungsberichte, 1916, S. 1115, Gl. (20). — Es ist zur Abkürzung gesetzt $g_k^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_k}$.

2) Vgl. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Berlin, Julius Springer 1918, S. 191.

1) Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Leipzig, Joh. Ambr. Barth 1916, S. 45, Gl. (50).

2) Man vgl. z. B. Weyl, l. c. S. 105, Gl. (41).

$$\frac{\partial \gamma'_{ik}}{\partial x_k} = 0, \qquad (9)$$

worin die γ'_{ik} durch

$$\left. \begin{aligned} g_{\mu\nu} &= -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \\ \delta_{\mu\nu} &= 0 \text{ für } \mu \neq \nu \text{ und } = 1 \text{ für } \mu = \nu \end{aligned} \right\} \qquad (10)$$

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\gamma \qquad (11)$$

$$\gamma = \sum_\alpha \gamma_{\alpha\alpha} \qquad (12)$$

definiert sind. Aus (10), (11), (12) folgt noch

$$\gamma' = \sum_\alpha \gamma'_{\alpha\alpha} = -\gamma \qquad (13)$$

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\gamma'. \qquad (14)$$

Unter diesen Bedingungen hat nämlich Einstein die Feldgleichungen näherungsweise integriert[1]) und findet für t_i^k den Ausdruck

$$2\varkappa t_i^k = \sum_{\mu,\nu,\alpha} \left\{ \frac{1}{4}\delta_i^k \left[\left(\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_k} + \frac{1}{4} \frac{\partial \gamma'}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma'}{\partial x_k} \right\}. \qquad (15)$$

[2])

Wir haben nun die rechte Seite von (7) bis auf Größen von höherer als 2. Ordnung auszuwerten.

Dabei können wir setzen

$$g^{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}$$ [3])

Ferner bemerken wir, daß man hat

$$g^{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ r \end{matrix} \right\} = \sum_\alpha \begin{bmatrix} \alpha\alpha \\ r \end{bmatrix} = \sum_\alpha \left(\frac{\partial \gamma_{r\alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_r} \right) = \sum_\alpha \frac{\partial \gamma'_{r\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0$$

mit Rücksicht auf (9). Das zweite Glied in (4) und das letzte Glied in (7) sind deshalb zu vernachlässigen. Für G^* erhalten wir nun

$$G^* = -\begin{bmatrix} \alpha s \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha r \\ s \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \sum_{\alpha,r,s} \left(\frac{\partial \gamma_{r\alpha}}{\partial x_s} + \frac{\partial \gamma_{sr}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \gamma_{\alpha s}}{\partial x_r} \right) \left(\frac{\partial \gamma_{s\alpha}}{\partial x_r} + \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \gamma_{\alpha r}}{\partial x_s} \right) = \frac{1}{4} \sum_{\alpha,r,s} \left[\left(\frac{\partial \gamma_{r\alpha}}{\partial x_s} - \frac{\partial \gamma_{s\alpha}}{\partial x_r} \right)^2 - \left(\frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right] = -\frac{1}{4} \sum_{\alpha,r,s} \left[\left(\frac{\partial \gamma_{r\alpha}}{\partial x_\alpha} \right)^2 - 2 \frac{\partial \gamma_{r\alpha}}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial \gamma_{s\alpha}}{\partial x_r} + \left(\frac{\partial \gamma_{s\alpha}}{\partial x_r} \right)^2 - \left(\frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right]$$

und schließlich

$$G^* = \frac{1}{4} \sum_{\alpha,r,s} \left[\left(\frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_\alpha} \right)^2 - 2 \frac{\partial \gamma_{r\alpha}}{\partial x_s} \frac{\partial \gamma_{s\alpha}}{\partial x_r} \right]. \qquad (17)$$

Weiter ergibt sich für t_i^k:

$$2\varkappa t_i^k = \frac{1}{4}\delta_i^k \sum_{\alpha,r,s} \left[\left(\frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_\alpha} \right)^2 - 2 \frac{\partial \gamma_{r\alpha}}{\partial x_s} \frac{\partial \gamma_{s\alpha}}{\partial x_r} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial x_\mu} \frac{\partial \gamma_{\mu k}}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial \gamma_{k\mu}}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_i} + \frac{1}{4} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma}{\partial x_k}. \qquad (18)$$

Führen wir endlich mit Hilfe von (14) die γ'_{ik} statt der γ_{ik} ein und achten stets auf (9), so erhalten wir als Endresultat:

$$2\varkappa t_i^k = \frac{1}{4}\delta_i^k \sum_{\alpha,r,s} \left[\left(\frac{\partial \gamma'_{rs}}{\partial x_\alpha} \right)^2 - 2 \frac{\partial \gamma'_{r\alpha}}{\partial x_s} \frac{\partial \gamma'_{s\alpha}}{\partial x_r} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right] + \frac{\partial \gamma'_{k\mu}}{\partial x_\nu} \frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_k} \frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_i} + \frac{1}{4} \frac{\partial \gamma'}{\partial x_k} \frac{\partial \gamma'}{\partial x_i}. \qquad (19)$$

[1])

Dieser Ausdruck stimmt nun überraschenderweise nicht mit dem Einsteinschen Ausdruck (15) überein. Da aber jedenfalls beide Ausdrücke Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial (\mathfrak{T}_i^k + t_i^k)}{\partial x_k} = 0 \qquad (20)$$

[2])

und der daraus folgenden Gleichung

$$\frac{\partial t_i^k}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_i} T_{\alpha\beta} = 0 \qquad (21)$$

[3])

sind, muß ihre Differenz

$$A_i^k = -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma'_{r\alpha}}{\partial x_s} \frac{\partial \gamma'_{s\alpha}}{\partial x_r} \delta_i^k + \frac{\partial \gamma'_{k\mu}}{\partial x_\nu} \frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_i} \qquad (22)$$

der Differentialgleichung

$$\frac{\partial A_i^k}{\partial x_k} = 0 \qquad (23)$$

genügen.

1) A. Einstein, Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Berliner Sitzungsber. 1916, S. 688 ff.

2) A. Einstein, Über Gravitationswellen, Berliner Sitzungsberichte 1918, S. 158, Gl. (9). — Einstein berechnet t_{ki} und nicht t_i^k, deshalb haben bei uns alle Terme das entgegengesetzte Vorzeichen wie bei Einstein.

3) Das ergibt sich aus dem Gleichungssystem $g_{\mu\alpha} \cdot g^{\mu\beta} = \delta_\alpha^\beta = \delta_{\alpha\beta}$.

1) Nebenbei bemerkt, sind diese Werte für die Energiekomponenten auch dann noch richtig, wenn die Gleichungen (9) nicht gelten.

2) A. Einstein, Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie. Berliner Sitzungsberichte 1916, S. 1115, Gl. (21).

3) A. Einstein, Über Gravitationswellen. Berliner Sitzungsberichte 1918, S. 157, Gl. (8).

Das ist in der Tat der Fall, denn man hat

$$\frac{\partial A_i^k}{\partial x_k} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma'_{r\alpha}}{\partial x_s \partial x_i}\frac{\partial \gamma'_{s\alpha}}{\partial x_r} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma'_{r\alpha}}{\partial x_s}\frac{\partial^2 \gamma'_{s\alpha}}{\partial x_r \partial x_i} + \frac{\partial^2 \gamma'_{k\mu}}{\partial x_\nu \partial x_k}\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_i} + \frac{\partial \gamma'_{k\mu}}{\partial x_\nu}\frac{\partial^2 \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_k \partial x_i}.$$

Das erste und zweite Glied der rechten Seite gehen durch Vertauschung von r und s ineinander über, sind also gleich und ihre Summe hebt sich gegen das letzte Glied fort, während das dritte Glied nach (9) verschwindet. Wir kommen also zu dem merkwürdigen Resultate, daß die t_i^k durch die Gleichungen (20) im betrachteten Spezialfalle nicht eindeutig bestimmt sind[1]).

Zusammenfassung.

Die Energiekomponenten t_i^k des Gravitationsfeldes werden für den allgemeinen Fall berechnet. Der erhaltene Ausdruck wird sowohl für ein Koordinatensystem, in dem $g = -1$ ist, als auch für die Einsteinsche Näherungslösung spezialisiert und das Ergebnis mit den bekannten Ausdrücken verglichen. In letzterem Falle erweisen sich die Energiekomponenten als nicht eindeutig bestimmt.

1) Man kann dann jedes Lösungssystem von (20) Energiekomponenten nennen. Die weiteren Entwicklungen in Einsteins Arbeit „Über Gravitationswellen" werden deshalb durch die Nichteindeutigkeit des Lösungssystems von (20) nicht tangiert.

Wien, September 1918.

(Eingegangen 22. September 1918.)

Zwei Staugeräte.

Von Ragnar Holm.

Für den Anemoklinographen[1]) der Siemens & Halske A.-G. habe ich eine Stauscheibe für Windgeschwindigkeitsmessungen und einen Stauzylinder für Windneigungsmessungen ausprobiert.

Die Stauscheibe bildet die Lösung folgender Aufgabe:

Ein Staugerät für Windgeschwindigkeitsmessungen zu finden, dessen Druckdifferenz zwischen vorn und hinten innerhalb eines großen Gebietes von der Windneigung gegen die Gerätachse und auch innerhalb nicht zu knapper Grenzen davon unabhängig ist, ob die Druckdifferenz eine Luftströmung, Nebenschlußstrom, durch die Zuleitungen zum Staugerät hervorbringt. Dabei ist es wertvoll, wenn das Gerät mäßige Dimensionen bekommt.

Der Stauzylinder bildet die Lösung folgender Aufgabe: Ein Staugerät zu finden, das meßbar auf Windneigungen reagiert, und ebenso wie die Scheibe einen Luftstrom durch die Zuleitungen verträgt, ohne daß dadurch die Skala in mehr als leicht bestimmbarer Weise verändert wird.

Beide Staugeräte sollten bequem reproduzierbar sein. Beide sollten Schutzvorrichtungen gegen Staub besitzen oder jedenfalls recht viel Staub oder Regentropfen in dem sie treffenden Luftstrom vertragen, ohne ihre Skala zu verändern.

Die Stauscheibe (Fig. 1) besteht aus einer kreisrunden Platte P (z. B.: Dicke 1 mm;

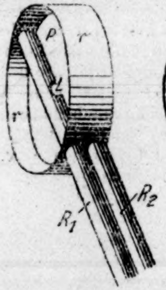

Fig. 1.

MARINE BIOLOGICAL LABORATORY WOODS HOLE LIBRARY MASS.

Durchmesser 60 mm), die beiderseits mit einem Rand, r, von einer Höhe gleich etwa $1/_8$ des Scheibendurchmessers versehen ist. Die Verbindungsrohre R_1 und R_2 führen durch Löcher im Rand quer über die Scheibe. An der Scheibenmitte ist jedes R-Rohr mit einem Loch L versehen. Der an der Scheibenmitte herrschende Druck wirkt durch das betr. Loch und weiter durch das betr. R-Rohr auf das daran angeschlossene Manometer.

Der Stauzylinder wird in der Fig. 2 in Querschnittszeichnung gezeigt. Es ist ein hohler Kreiszylinder von 40 mm Durchmesser, dessen Enden durch Deckel geschlossen sind und

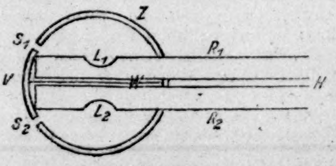

Fig. 2.

1) Siehe H. Gerdien, Jahrb. d. wissensch. Ges. f. Flugtechnik 2, 67, 1913—14; Verhandl. d. D. phys. Ges. 15, 961, 1913 und diese Zeitschr. 14, 1161, 1913.

dessen Inneres durch eine Scheidewand in zwei Kammern geteilt ist. Die Länge des Zylinders ist etwa gleich dem Dreifachen seines Durchmessers. Auf der Fig. 2 bedeutet Z den Zylindermantel; W die Scheidewand; R_1 und R_2 zwei in der Mitte des Zylinders nach den Kammern führende Rohre. Die vorderen Enden dieser Rohre (bei V) sind geschlossen. Die Verbindung einer Kammer mit dem zugehörigen Rohr ist durch das Loch L_1 bzw. L_2 zustande gebracht. S_1 und S_2 sind zwei 1,5 mm weite Spalten, die etwas kürzer als die halbe Zylinderlänge sind. Ihre vordersten Ränder stehen genau 60° auseinander. Durch diese Spalte kommunizieren die Kammern mit der äußeren Luft.

Die Anordnung der Zuleitungsrohre zur Stauscheibe und zum Stauzylinder wurde zu dem Zwecke so gewählt, daß das Innere der Zuleitungsrohre möglichst vor Verschmutzen geschützt werden sollte. Die Löcher der R-Rohre der Stauscheibe sind ja (wie bei der Prandtlschen Scheibe) gegen vom Wind nach der Scheibe getriebene Staubteilchen geschützt. Eine entsprechende Schutzeinrichtung könnte ein Staurohr nicht bekommen. Die Kammern des Stauzylinders können einen recht großen Bodensatz (z. B. Regenwasser) haben, ehe davon etwas in die betr. R-Rohre dringt.

Mit der Stauscheibe mißt man in bekannter Weise. Nach den unten angegebenen Messungen zu urteilen, dürfte durch diese Stauscheibe die gestellte Aufgabe befriedigend gelöst sein. Mit allen Stauscheiben hat sie allerdings, wie ich bestätigt habe, die Eigenschaft gemeinsam in stark kleinwirbeliger Luft ihren Stauscheibenkoeffizienten k etwas zu vergrößern [1]). Das Prandtlsche Staurohr ist in dieser Hinsicht unempfindlicher. Es muß aber, um gegen Nebenschlußstrom genügend unempfindlich zu werden, unbequem große Dimensionen erhalten (vgl. unten). Die Stauscheibe läßt sich wohl mit einfacheren Mitteln gegen schädliche Verschmutzung schützen als das Staurohr (vgl. oben). Für Messungen mit dem Anemoklinographen im Freien, wo der Wind nicht kleinwirbelig ist, wo also der normale Stauscheibenkoeffizient k gilt, ist deshalb die Scheibe dem Rohr vorzuziehen.

Der Stauzylinder wirkt folgendermaßen: Wenn der Wind ihn direkt von vorn, von V, trifft, erhalten seine beiden Kammern denselben Druck. Wenn aber der Wind, bei horizontaler Scheidewand, von vorn, aber etwas von oben kommt, so erhält die obere Kammer einen dem Neigungswinkel, Θ, und der Windgeschwindigkeit v entsprechenden Überdruck Z der unteren Kammer gegenüber. Mit Bezug auf den die Neigung messenden Staukörper forderte die Aufgabe eine möglichst einfache Funktion $Z(v, \Theta)$ bei einfacher und reproduzierbarer Konstruktion. Auch diese Forderungen dürften erfüllt sein.

Die im folgenden angegebenen Messungen wurden im Auftrage der Firma Siemens & Halske A.-G. durch gefälliges Entgegenkommen in der Modellversuchsanstalt für Aerodynamik in Göttingen ausgeführt.

Die Druckdifferenz zwischen den der Scheibe bzw. dem Zylinder nächstliegenden Teilen der Zuleitungsrohre R_1 und R_2 wurde mikromanometrisch gemessen, und zwar bei verschiedenen Windgeschwindigkeiten und verschiedenen Windneigungen und auch mit verschieden stark drosselnden Kapillaren, die so als Nebenschluß eingeschaltet waren, daß durch sie eine Strömung zwischen den Rohren R_1 und R_2 stattfinden konnte.

Bezeichnungen:

v = Windgeschwindigkeit in m/sec;

H = Barometerdruck in mm Hg.

t = Lufttemperatur in C°;

$h = v^2 \cdot 0{,}06587 \, \frac{H}{760} \, \frac{1}{1 + \frac{t}{273}}$ = Geschwindigkeitshöhe in mm Wasser;

Θ^0 = Windneigung gegen die Normale der Stauscheibe;

Θ^0 = Windneigung gegen die Symmetrieebene des Stauzylinders. Ihn symmetrisch von vorn treffender Wind hat also die Neigung $\Theta = 0$;

Ψ^0 = Windneigung in der Symmetrieebene gegen die Symmetrieachse HV (Fig. 2) des Zylinders;

c = Luftstrom in ccm/sec durch die von R_1 nach R_2 leitende Kapillare;

$w = \frac{D}{c}$ oder $\frac{Z}{c}$ Widerstand der erwähnten Kapillare;

$D = D(h, \Theta, c)$ = Druckdifferenz in mm Wasser an der Stauscheibe;

$Z = Z(h, \Theta, \Psi, c)$ = Druckdifferenz in mm Wasser zwischen den Kammern des Stauzylinders;

k = Stauscheibenkoeffizient, definiert durch $D(h, 0, 0) = kh$. Schon von Reck

1) Vgl. Regeln für Leistungsversuche an Ventilatoren und Kompressoren, Seite 51, Verlag: Verein D. Ingenieure, 1912. Siehe auch: Mitteilungen der Prüfungsanstalt für Heizungs- und Lüftungseinrichtungen, Heft 1, S. 41—46, 1910.

nagel[1]), später auch von O. Krell[2]) wurde k für wirbelfreie Luft angegeben zu $k = 1{,}37$;

f = Kreisfläche der Stauscheibe in cm².

Messungen an der Stauscheibe.

Tabelle I.

		Scheibe mit $f = 26{,}4$		Scheibe mit $f = 12{,}5$	
v	w	k beob.	k ber.	k beob.	k ber.
10,21	∞	1,37	1,37	1,38	1,37
	6	1,36	1,36	1,336	1,345
	2,1	1,334	1,333	1,31	1,29
5,10	∞	1,37	1,37		
	6	1,36	1,36		
	2,1	1,344	1,333		

	v = etwa 10		15		20	
$f = 26{,}4$	D beob.	D ber.	D beob.	D ber.	D beob.	D ber.
$w = \infty$	10,5	10,5	21,5	21,5	36,5	36,5
$w = 1{,}09$	10,1	10,0	20,2	20,5	34,6	34,8
$w = 0{,}43$	9,6	9,2	19,9	18,9	32,2	32,1

$k_{ber.}$ bzw. $D_{ber.}$ sind aus den Formeln (1) und (2) erhalten.

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{1}{h}\cdot D'(h, o, w), \\ \text{wo} \quad & \\ D'(h,o,w) &= D(h,o,o)\left[1 - 1{,}38\,\frac{1}{f\cdot w}\right] \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Diese Formel wird von der Tabelle I auf etwa 1 Proz. genau bestätigt.

Für den Fall $f = 26{,}4$ lautet (1):

$$D'(h, o, w) = D(h, o, o)\left[1 - \frac{0{,}0523}{w}\right] \qquad (2)$$

Die Unabhängigkeit des k von v oder h wird durch die für die Stauscheibe mit $f = 26{,}4$ geltende nach Messungen zusammengestellte Tabelle II bestätigt.

Tabelle II.

h =	0,93	1,69	2,52	3,36	4,10
k =	1,365	1,385	1,385	1,370	1,375

$k_{mittel} = 1{,}376.$

Über die Abhängigkeit des D von Θ (Messungen bei $h = 3{,}36$) gibt das Diagramm I (Fig. 3) Auskunft. Man sieht, daß infolge einer gegenseitigen Kompensation von P und S die Druckdifferenz D sich für ein recht weites Θ-Gebiet um $\Theta = 0$ herum fast konstant hält. Ein solches

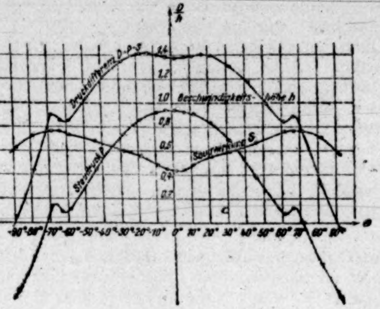

Fig. 3.

Gebiet haben auch andere Stauscheiben[1]). Die Konstanz innerhalb des betr. Gebietes — für $|\Theta| < 27^0$ ist $|D(h, \Theta, 0) - D(h, 0, 0)| < 0{,}01\,D$ bei unserer Scheibe — dürfte allerdings, nach den Göttinger Beobachtungen zu beurteilen, bei dieser Scheibe besonders gut sein. Das Prandtlsche Staurohr hat auch ein derartiges Gebiet mit der Ausdehnung $|\Theta| < 15^0$, innerhalb dessen die Messungen allerdings fast vollständig unabhängig von Θ sind[2]).

Auf freundliche Anregung von Herrn Professor L. Prandtl wurden Vergleichsmessungen zwischen einer Stauscheibe (Durchmesser 6 cm) und einem Prandtl-Staurohr von ungefähr demselben Durchmesser (5 cm) gemacht. Das Staurohr hatte für den Empfang des statischen Druckes einen den Rohrumfang fast umfassenden, 2,5 mm breiten Spalt. Für das Staurohr ergab sich etwa

$$D'(h, 0, W) = D(h, 0, 0)\left[1 - \frac{0{,}044}{W}\right]$$

d. h. fast dieselbe Nebenschlußempfindlichkeit, wie laut (2) bei der gebrauchten Stauscheibe vorhanden ist. Die Nebenschlußempfindlichkeit der Stauscheibe ist nach (1) umgekehrt proportional dem Quadrat des Durchmessers. Es ist denkbar, daß die betreffende Empfindlichkeit eines Staurohres langsamer mit den linearen Dimensionen variiert. Dann hat man zu erwarten, daß eine kleinere Stauscheibe als die verwendete empfindlicher gegen Nebenschlußstrom sein wird als ein Staurohr mit demselben Durchmesser. Eine Scheibe mit $f >$ etwa 26 müßte dagegen weniger empfindlich als das entsprechende Staurohr sein.

1) G. Recknagel, Wied. Ann. **10**, 677, 1880.

2) O. Krell, Über Messung von dynamischem und statischem Druck bewegter Luft. München 1904.

1) Vgl. R. Katzmeyer, Der Motorwagen **17**, 303, 1914 und Krell, l. c.

2) R. Kröner, Zeitschr. d. Vereins D. Ing. 1917, S. 605.

Da die Staurohrlänge mindestens den 5 bis 6 fachen Durchmesser beträgt, wird wohl, auch bei etwaiger Veränderung der zur Aufnahme des statischen Druckes dienenden Löcher, ein für den Anemoklinographen passendes Staurohr unbequem groß. Die leichtere (in der Bauart einfachere) mit dem Durchmesser 6 cm gerade gut passende Scheibe dürfte vorzuziehen sein, besonders da die Scheibe, wie erwähnt, bequemer gegen schädlichen Staub geschützt werden kann.

Die Tabelle I zeigt, daß D wenig mit c variiert (also bei mäßigem c fast konstant bleibt) und im übrigen eine einfache Funktion von c bzw. w ist. Das Diagramm I zeigt, daß D innerhalb weiter Grenzen fast unabhängig von Θ ist. Die Stauscheibe erfüllt offenbar die ihr gestellten Bedingungen.

Messungen am Stauzylinder.

Drei gleich dimensionierte Stauzylinder wurden untersucht. Bei den im Diagramm II (Fig. 4)

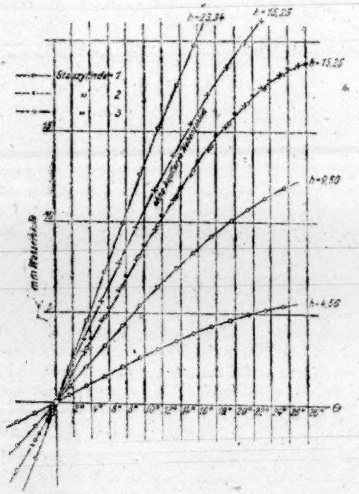

Fig. 4.

dargestellten Hauptmessungen waren die betr. Rohre R_1 und R_2 mittels einer Kapillare verbunden. Die Kapillare hatte den Widerstand $w = 0{,}95$, d. h. einer Druckdifferenz Z entsprach ein Nebenschluß-Luftstrom von

$$\frac{Z}{0{,}95} \frac{\text{cm}^3}{\text{sec.}}$$

Das Diagramm II (Fig. 4) enthält auch eine ohne den kapillaren Nebenschluß mit dem Zylinder 3 erhaltene Kurve. Die betr. Kurve hat durchweg 1,215 mal größere Ordinaten als die entsprechende Kurve mit Nebenschluß.

Der eine Zylinder wurde ein anderes Mal bei $h = 15{,}25$ und $h = 1{,}980$ geprüft, und zwar teils mit, teils ohne Nebenschluß. Dabei wurde teils der vorher gebrauchte, teils ein zweiter Nebenschluß verwendet, beide so gewählt, daß der für den Anemoklinographen in Frage kommende Widerstand einen Betrag zwischen ihren beiden haben würde. Mit dem ersten Nebenschluß ergaben sich wieder 1,215 mal kleinere Ausschläge als ohne Nebenschluß. Für den zweiten Nebenschluß ergab sich das Verhältnis 1,19. Mit Kapillaren verschiedener Stärke wurde festgestellt, daß die Abweichung der Ausschläge bei Verwendung eines Nebenschlusses (von der in der Tabelle I vorkommenden Größenordnung), von den Ausschlägen ohne Nebenschluß recht genau proportional dem Nebenschlußstrom c sind. Zur Berechnung der Z-Werte kann man die Formeln (3) und (4) benutzen. Die Formel (3) gilt bis $\Theta = 26^0$, auf Grund des Diagrammes II (Fig. 4) und der erwähnten weiteren Messungen auf 0,1 mm Wasser genau.

$$Z(h, \Theta, 0, 0) = 1{,}56 \cdot h \left[0{,}045 \cdot \Theta - \frac{(0{,}045 \cdot \Theta)^4}{8} \right] \quad (3)$$

$$Z(h, \Theta, 0, c) = Z(h, \Theta, 0, 0) \cdot \left[1 - \frac{a}{w} \right], \quad (4)$$

wobei im vorliegenden Fall die Konstante a, die natürlich von der Spaltweite abhängt, den Wert 0,18 hat.

Besondere Messungen zeigten, daß Z um weniger als 1 Proz. variiert, wenn $|\Psi| < 7^0$ bleibt.

Die angeführten Messungen zeigen, daß die Stauzylinder gut reproduzierbar sind, auch für den Fall, daß sie mit Nebenschluß verwendet werden sollen. Die Z-Skala läuft schön gerade durch den Punkt $\Theta = 0$ und hat überhaupt eine zweckmäßige, auf langer Strecke wenig von der Geraden abweichende Form. Für die Berechnung von Θ aus Z-Messungen ist es natürlich erforderlich, gleichzeitige Werte von v oder h zu kennen.

Die angegebenen Formeln gelten natürlich mit Sicherheit nur innerhalb der kleinen, von den Messungen umfaßten w- und f-Gebiete.

(Eingegangen 15. August 1918.)

Über die statischen kugelsymmetrischen Lösungen von Einsteins „kosmologischen" Gravitationsgleichungen.

Von H. Weyl.

Einstein hat in einer in den Sitzungsberichten d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1917, S. 142 erschienenen Note seinen Gravitationsgleichungen ein die Konstante λ enthaltendes Glied hinzugefügt. Über die statischen kugelsymmetrischen Lösungen dieser durch das „λ-Glied" ergänzten Gleichungen habe ich am Schluß meines Buches „Raum, Zeit, Materie" (Berlin, 1918; ich zitiere es hier mit den Anfangsbuchstaben RZM) einige Andeutungen gegeben, die ich hier etwas genauer ausführen möchte.

Die metrische Fundamentalform einer statischen kugelsymmetrischen Welt hat bei geeigneter Maßskala des Abstandes

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

vom Zentrum die Gestalt:

$$ds^2 = f^2 d\tau^2 - d\sigma^2,$$

$$d\sigma^2 = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + l(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2; \qquad (1)$$

darin ist τ die Zeit, $x_1 x_2 x_3$ sind die Raumkoordinaten und $d\sigma^2$ ist die metrische Fundamentalform des Raumes. Der Faktor l sowie die Lichtgeschwindigkeit f hängen nur von r ab. Wir setzen noch

$$1 + lr^2 = h^2, \qquad fh = \Delta.$$

(1) stimmt mit der metrischen Fundamentalform einer (dreidimensionalen) Rotationsfläche $z = F(r)$ im vierdimensionalen Euklidischen Raum mit den Cartesischen Koordinaten $x_1 x_2 x_3 z$ überein, wenn die den Drehriß bestimmende Funktion F aus

$$\left(\frac{dF}{dr}\right)^2 = h^2 - 1$$

bestimmt wird.

Ist die Welt masseleer, so ergibt sich[1])

$$\Delta = 1, \qquad f^2 = \frac{1}{h^2} = 1 - \frac{\lambda}{6} r^2. \qquad (2)$$

Setzen wir $\frac{6}{\lambda} = a^2$, so ist daher

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dz^2, \qquad f = \frac{z}{a},$$

wo $x_1 x_2 x_3 z$ vier an die Bedingung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + z^2 = a^2 \qquad (3)$$

geknüpfte Raumkoordinaten bedeuten. Der leere Weltraum ist also der durch (3) dargestellten „Sphäre" im vierdimensionalen Raum mit den Cartesischen Koordinaten $x_1 x_2 x_3 z$ kongruent. Da auf der Äquatorkugel $z = 0$ die Lichtgeschwindigkeit f verschwindet, die metrische Fundamentalform der Welt also singulär wird, kann von dieser Lösung nur ein bis an den Äquator nicht heranreichendes Stück realisiert sein: es widerstreitet dem Einsteinschen Gesetz, daß die Welt vollständig masseleer ist[1]). Wenigstens die Äquatorkugel muß von Materie umgeben sein.

Wir behandeln den einfachsten Fall, daß eine inkompressible Flüssigkeit von der konstanten Dichte μ eine zwischen zwei Breitenkugeln enthaltene „Schale" oder „Zone" erfüllt, die den Äquator umgibt. Im Gebiete der Flüssigkeit gelten dann die Formeln (RZM, S. 211 und S. 225)

$$\frac{1}{h^2} = 1 + \frac{2M}{r} - \frac{2\mu + \lambda}{6} r^2, \qquad (4)$$

$$\frac{2}{h^3}\frac{d\Delta}{dr} = br, \qquad (5)$$

wo M und b Konstante sind. Bedeutet P den Druck im Innern der Flüssigkeit, so ist ferner

$$(\mu + P) f = b.$$

Ist $r = r_0$ eine der beiden Grenzkugeln, zwischen denen die Flüssigkeit enthalten ist, so muß wegen des stetigen Anschlusses von $\frac{1}{h^2}$ an die im leeren Raume geltenden Werte (2) die Konstante

$$M = \frac{\mu r_0^3}{6} \qquad (6)$$

sein. Daraus geht hervor, daß beide Grenzkugeln denselben Radius r_0 besitzen, die Flüssigkeitszone also zum Äquator symmetrisch ist.

Auch in ihrem jetzigen Zustand läßt sich die Welt kongruent abbilden auf eine dreidimensionale Umdrehungsfläche (um die z-Achse) im vierdimensionalen Euklidisch-Cartesischen Raum der Koordinaten $x_1 x_2 x_3 z$. Wir bezeichnen sie als Sphäroid; sie entsteht aus der Sphäre (3), indem die zwischen den beiden Breitenkugeln $r = r_0$ enthaltene Zone herausgenommen und durch eine anders gestaltete ersetzt wird. Auch das Sphäroid ist symmetrisch zu seinem Äquator $z = 0$. Der Radius dieser Äquatorkugel, $r = a$, ist die (zwischen r_0 und a gelegene) Nullstelle von $\frac{1}{h^2}$. Setzt man $\frac{r}{a} = \rho$ und

$$\left(\frac{r_0}{a}\right)^3 : \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right) = p,$$

1) RZM, S. 225. Siehe auch de Sitter, Proc. Acad. Amsterdam, Vol. XX, 30. Juni 1917.

1) Dies wurde von de Sitter übersehen. Vgl. Einstein, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1918, S. 270.

so ergibt eine kurze Rechnung

$$\frac{1}{h^2} = \frac{(1-\varrho)(\varrho^2+\varrho+p)}{(1-p)\varrho}.$$

Eine Funktion auf dem Sphäroid oder auch nur auf der von Flüssigkeit erfüllten Zone desselben nenne ich gerade oder ungerade, wenn sie eine gerade, bzw. ungerade Funktion von z ist. Führen wir einen Augenblick als „Uniformisierende" für die Umgebung des Äquators die Größe t durch die Gleichung

$$1-\varrho = t^2$$

ein, so bekommen wir für $\frac{1}{h}$ und z die in der Umgebung von $t=0$ konvergenten, nach ungeraden Potenzen von t fortschreitenden Entwicklungen

$$\frac{1}{h} = c_0 t + \cdots, \quad z = c_0' t + \cdots \quad (c_0, c_0' \neq 0).$$

Bei regulärer analytischer Fortsetzung ist also $\frac{1}{h}$ eine ungerade Funktion.

Ich setze

$$\bar{f} = \frac{\mu f}{b}, \quad \bar{A} = fh = \frac{\mu A}{b}.$$

Aus der Differentialgleichung für A:

$$\frac{1}{h^3}\frac{dA}{dr} = \frac{\mu r}{2}$$

und der durch Differentiation aus (4) hervorgehenden Formel

$$\frac{1}{h^3}\frac{dh}{dr} = \frac{M}{r^2} + \frac{2\mu+\lambda}{6} r$$

ergibt sich durch Division

$$\frac{dA}{dh} = \frac{3q}{2+p\varrho^{-3}} = A(\varrho),$$

wo die Konstante

$$q = \frac{2\mu}{2\mu+\lambda}$$

ist; also

$$\bar{A} = \int A\,dh = Ah - \int h\,dA.$$

Führen wir in dem letzten Integral t als unabhängige Variable ein, so wird, da A eine gerade Funktion ist und sich in eine reguläre, nach geraden Potenzen von t fortschreitende Reihe entwickeln läßt, der Integrand bei $t=0$ regulär; wir können demnach $t=0$ oder $\varrho=1$ als untere Integrationsgrenze nehmen und erhalten dann

$$\bar{f} = \left(A + \frac{1}{h}\int_\varrho^1 h\,dA\right) + \frac{\text{const.}}{h} \quad \text{und} \quad \frac{P}{\mu} = \frac{1}{\bar{f}} - 1. \qquad (7)$$

Hier ist nun in der Formel für $\bar{f}$ der erste, in runde Klammern gefaßte Teil eine gerade, der zweite, klein gedruckte, die Integrationskonstante enthaltende eine ungerade Funktion. Da auf beiden Breitenkugeln, welche die Flüssigkeitszone begrenzen, der Druck $P=0$, $\bar{f}$ also $=1$ sein muß, folgt, daß die Integrationskonstante verschwindet, jener klein gedruckte Teil daher zu streichen ist und $\varrho_0 = \frac{r_0}{a}$ der Gleichung

$$A(\varrho_0) + \frac{1}{h(\varrho_0)}\int_{\varrho_0}^1 h\,dA = 1$$

zu genügen hat. Wir sehen, daß $\bar{f}$ in der ganzen Flüssigkeitszone einschließlich des Äquators oberhalb einer positiven Grenze bleibt. Beachtet man, daß

$$\frac{q}{p} = \varrho_0^{-3},$$

so können wir jene Gleichung am einfachsten folgendermaßen formulieren. Man führe die beiden Funktionen von ϱ

$$u^2 = \frac{1-\varrho}{\varrho}(\varrho^2+\varrho+p), \quad v = \frac{3p}{2+p\varrho^{-3}},$$

ein, dann gilt für $\varrho = \varrho_0$:

$$v + u\int_\varrho^1 \frac{dv}{u} = \varrho^3. \qquad (8)$$

Dies ist, wie man sieht, eine **parameterfreie Relation** zwischen $\frac{r_0}{a}$ und $\frac{\mu}{\lambda}$. Sie hat bei gegebenem p stets eine und nur eine Lösung $\varrho = \varrho_0(p)$. Denn die linke Seite hat als Funktion von ϱ die Ableitung

$$\frac{du}{d\varrho}\int_\varrho^1 \frac{dv}{u},$$

und da u eine abnehmende Funktion ist:

$$u^2 = (1-\varrho^2) + p\left(\frac{1}{\varrho} - 1\right),$$

v eine zunehmende, so nimmt die linke Seite von (8) monoton ab, wenn ϱ von 0 bis 1 wächst, und sinkt für $\varrho = 1$ auf den Wert $\frac{3p}{2+p} < 1$. Das besagt, daß der Druck im Innern der Flüssigkeit von der Oberfläche nach dem Äquator hin monoton zunimmt, daher, wie es sein muß, überall positiv ist. Die rechte Seite unserer Gleichung, ϱ^3, nimmt, wenn ϱ das angegebene Intervall durchläuft, monoton von 0 bis 1 zu. Daraus ergibt sich die Existenz einer eindeutigen Lösung $\varrho = \varrho_0(p)$. Auch wird für sie $\varrho^3 > p$, eine Bedingung, die erfüllt sein muß, damit μ positiv ausfällt. In der Tat ist

$$v + u\int_{\varrho}^{1}\frac{dv}{u} > v + u\cdot\frac{1}{u}\int_{\varrho}^{1} dv = v(1)$$

$$= \frac{3p}{2+p} > \frac{3p}{2+1} = p.$$

Es ist von Interesse, für ein sehr wenig von 1 abweichendes ϱ_0, d. h. für eine sehr schmale Flüssigkeitszone die in ihr enthaltene Gesamtmasse zu berechnen. Für $\varrho_0 = 1$ ergibt unsere Gleichung $p = 1$, d. h. $\frac{\lambda}{2\mu} = 0$. Nehmen wir

$$\frac{\lambda}{2\mu} = \varepsilon \text{ und } 1 - \varrho = \sigma, \ (1 - \varrho_0 = \sigma_0)$$

als sehr kleine Größen an und entwickeln nach Potenzen, so kommt in erster Annäherung

$$p = 1 - 3\sigma_0 - \varepsilon, \qquad v(\varrho_0) = 1 - 3\sigma_0 - \frac{2}{3}\varepsilon;$$
$$u^2 = 3\sigma, \qquad dv = -d\sigma,$$

und unsere Relation liefert

$$1 - \sigma_0 - \frac{2\varepsilon}{3} = 1 - 3\sigma_0, \text{ also } \varepsilon = 3\sigma_0.$$

Das Volumen der mit Flüssigkeit erfüllten Zone ist

$$\int h\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = 8\pi a^3 \int_{\varrho}^{1} h\varrho^2\,d\varrho,$$

und das ergibt in erster Annäherung

$$8\pi a^3 \sqrt{\frac{1-p}{3}} \int_{\varrho}^{1} \frac{d\varrho}{\sqrt{1-\varrho}} =$$

$$= 16\pi a^3 \sqrt{\left(\sigma_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)\sigma_0},$$

d. i. auf Grund der bewiesenen Gleichung

$$16\pi\sigma_0 a^3\sqrt{2}.$$

Ferner ist mit der gleichen Approximation

$$a^3 = \frac{6}{\lambda}\sqrt{\frac{6}{\lambda}}, \quad \frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1}{6\sigma_0}.$$

Für die Masse der Kugelzone kommt daher schließlich der Wert

$$\frac{32\pi\sqrt{3}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Will man die Kugelzone schmäler und schmäler machen, so muß man also gleichzeitig die Dichte der zur Verwendung kommenden Flüssigkeit so steigern, daß die Masse oberhalb einer festen positiven Grenze bleibt; sie konvergiert für eine unendlich dünne Zone gegen den soeben angegebenen Wert. Ist die ganze Welt homogen mit Masse erfüllt (diese hat dann die Dichte λ, und es herrscht in ihr kein Druck), so ergibt sich als Gesamtmasse der Wert

$$\frac{4\pi^2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Je schmäler die Zone ist, auf die sich die Flüssigkeit zusammendrängen soll, um so größer muß ihre Masse sein; bei unendlich dünner Zone ist sie $\frac{4\sqrt{6}}{\pi}$ mal so groß wie bei homogener Erfüllung der ganzen Welt.

Der eben durchgeführten Berechnung liegt die Vorstellung zugrunde, daß der Weltraum auf das Sphäroid umkehrbar-eindeutig abgebildet ist. Daneben aber besteht die andere Analysis-situs-Möglichkeit, daß je zwei einander diametral gegenüberliegenden Punkten des Sphäroids derselbe Punkt des Weltraums entspricht; in diesem Falle müssen die eben errechneten Massenwerte halbiert werden. Es ist von den Mathematikern in der Theorie der nicht-Euklidischen Raumformen erwiesen worden[1]), daß neben den beiden angegebenen Möglichkeiten keine weitere besteht; mit gutem Grund betrachtet man die zweite als die wesentlich einfachere. Trifft für den mit einer Massenzone versehenen Weltraum die erste zu, so haben wir eine leere Oberwelt und Unterwelt, die durch den Okeanos der Flüssigkeitsschale voneinander geschieden sind. Findet aber die zweite statt, so liegt nur eine einzige masseleere Hohlkugel $r < r_0$ vor. Jenseits der Entfernung r_0 vom Zentrum beginnt das Weltmeer; stößt man in radialer Richtung durch dies Grenzmeer hindurch, so kommt man nach Zurücklegung eines endlichen, vielleicht sehr kurzen Weges auf der diametral gegenüberliegenden Seite der Hohlkugel wieder zum Vorschein.

Bis jetzt haben wir untersucht, einen wie beschaffenen Massenhorizont der leere Raum nach Einsteins kosmologischen Gleichungen erfordert. Zum Schluß noch ein paar Worte über den Massenhorizont, der das Feld gegebener kugelsymmetrisch um das Zentrum verteilter Massen m begrenzen muß! In dem leeren Raum zwischen m und dem Horizont ist (RZM, S. 226)

$$\frac{1}{h^2} = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda}{6}r^2, \quad m = \text{const.} \tag{9}$$

Trifft von den beiden erwogenen Analysis-situs-Möglichkeiten die zweite zu (der ich a priori den Vorzug geben möchte), so liegen die Dinge jetzt im wesentlichen ebenso wie vorher. Wir können den Weltraum kongruent durch ein „Sphäroid" darstellen. Jeder Punkt des Weltraums erscheint im Bilde doppelt, so auch die Massen m; das

1) Genaue Formulierung und Literatur bei F. Enriques, Prinzipien der Geometrie, in der Enzykl. d. math. Wissensch. III, namentlich Nr. 38, S. 116.

Sphäroid und die auf ihm herrschende Massenverteilung sind wiederum symmetrisch zum Äquator $z = 0$. Die Konstante M bestimmt sich jetzt nicht durch (6), sondern aus

$$M + m = \frac{\mu r_0^3}{6}.$$

Dadurch modifiziert sich die transzendente Gleichung (8) unwesentlich. — Stellt hingegen das Sphäroid den Weltraum umkehrbar-eindeutig dar, so muß der innerhalb der Flüssigkeitszone geltende Ausdruck (4) sich über die eine Grenzkugel hinüber stetig an die Werte (9), über die andere aber stetig an die im leeren Raum geltenden (2) anschließen. Infolgedessen liegt die Flüssigkeitszone unsymmetrisch zum Äquator, und in (7) ist die Integrationskonstante nicht $= 0$. Der Flüssigkeitshorizont wird, sofern die Dichte $\mu > \lambda$ ist, aus einer Zone bestehen, welche die leere Unterwelt von der mit den Massen m erfüllten Oberwelt trennt. Für $\mu < \lambda$ aber tritt als Massenhorizont keine Zone mehr auf, sondern eine ganze über den Äquator hinübergreifende „Kalotte" (vgl. RZM, S. 225). Im Übergangsfall $\mu = \lambda$ ist die Zone gerade zur Kalotte geworden, im Innern der Flüssigkeit herrscht dann überall der Druck 0. Die genauere Durchrechnung bietet kein erhebliches Interesse.

(Eingegangen 14. Oktober 1918.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Grundlagen und Methoden der Pyrometrie.

Von F. Henning.

Einleitung. Der experimentierende Physiker sieht sich oft vor die Aufgabe gestellt, eine Temperatur zu messen, weil fast alle physikalischen Erscheinungen von der Temperatur abhängen. Bisweilen ist die Abhängigkeit nur gering, wie z. B. beim Brechungsexponenten eines Prismas; bei Messungen hoher Genauigkeit muß sie aber dennoch berücksichtigt werden. In Optik und Mechanik besitzt die Temperatur im allgemeinen nur den Charakter einer Hilfsgröße, deren ungefähre Kenntnis fast stets genügt. Größere Bedeutung kommt ihr in der Lehre von der Elektrizität und vom Magnetismus zu, schon weil die wichtige Größe des elektrischen Widerstandes der Metalle in hohem Maße durch die Temperatur beeinflußt wird. Elektrizität und Magnetismus sind aber auch sonst wegen ihres Zusammenhanges mit den molekularen Bewegungen[1] eng mit den thermischen Vorgängen verknüpft, bei denen die Temperatur durchaus beherrschenden Einfluß besitzt. In diesem Gebiet ist ihre genaue Kenntnis selbst außerhalb der reinen Wissenschaft von fundamentaler Bedeutung, und zahlreiche Instrumente sind erdacht worden, um die Überwachung der Temperatur von Schmelz- und Brennöfen auch durch den einfachen Fabrikarbeiter zu ermöglichen.

Wegen ihrer beträchtlichen praktischen Bedeutung besitzt die Lehre von der Messung hoher Temperaturen, die Pyrometrie, besonderes Interesse. Ich habe mich darum, einer Anregung der Schriftleitung dieser Zeitschrift folgend, gern bereit erklärt, die Grundlagen und hauptsächlichen Methoden der Pyrometrie in den folgenden Zeilen zusammenfassend darzustellen.

I. Theoretische Grundlagen.

a) Thermodynamik. Als die theoretische Grundlage aller Temperaturmessung wird oft das ideale Gas hingestellt, dessen Zustandsgleichung durch die Beziehung

$$PV = RT \tag{1}$$

gegeben ist, wenn P den Druck des Gases, V sein spezifisches Volumen und T seine absolute Temperatur bedeutet. R bezeichnet die sogenannte Gaskonstante. Ein ideales Gas ist, wie der Name sagt, ein nur in der Vorstellung vorhandener Körper, dem man sich praktisch zwar bis zum gewissen Grade annähern kann, der sich aber in aller Strenge nicht verwirklichen läßt. Es muß also befremden, daß dieser hypothetische Körper den Grundstein so wichtiger Messungen bilden soll. Die Aufklärung bringt die Thermodynamik.

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik sagt aus, daß man durch endliche Prozesse nicht beliebig viel von dem Wärmeinhalt eines Körpersystems, das gegen die Umgebung völlig abgeschlossen ist, in Arbeit verwandeln kann. Insbesondere gibt es keine periodisch wirkende Maschine, die unter Wahrung des ersten Hauptsatzes von der Konstanz aller Energien aus einem Wärmebehälter beliebig viel Arbeit entnehmen kann, selbst wenn man die Umwandlung auf die günstigste Weise, nämlich durch einen idealen, unendlich langsamen Prozeß vor sich gehen läßt, bei dem die Druck- und Temperaturunterschiede verschiedener Teile des Sy-

stems unendlich klein sind, derart, daß der Prozeß in allen seinen Teilen auch rückwärts durchlaufen werden kann, d. h. daß er umkehrbar oder reversibel ist. Bei einem umkehrbaren Carnotschen Prozeß ist die in Arbeit verwandelte Wärmemenge unabhängig von dem arbeitenden Körper, der abwechselnd adiabatisch und isotherm dilatiert und komprimiert wird und der während der isothermen Teile des Prozesses eine gewisse Wärmemenge aus einem Wärmebehälter entnimmt oder eine andere kleinere, Wärmemenge an einen zweiten Wärmebehälter abgibt. Würde ein Körper K_1 mehr Wärme in Arbeit umwandeln als ein Körper K_2, so könnte man den reversiblen Prozeß in der einen Richtung, nämlich in dem Sinne eines Arbeitsgewinnes, mit dem Körper K_1 und dann in umgekehrter Richtung, nämlich im Sinne eines Arbeitsaufwandes, mit dem Körper K_2 vornehmen und wäre dadurch bei häufiger Wiederholung dieses Vorganges in den Stand gesetzt, beliebig viel Wärme in Arbeit zu verwandeln, ohne daß das System sonstige Veränderungen erleidet. Da der zweite Hauptsatz der Thermodynamik diesem Resultat widerspricht, so muß also die im Carnotschen Prozeß gewonnene Arbeit unabhängig von den Eigenschaften irgendeines speziellen Körpers sein. Die Arbeitsgröße hat also allgemeine Gültigkeit, wenn sie für einen beliebigen Körper berechnet ist. Es spricht nichts dagegen, sich den Prozeß mit einem idealisierten Körper, dem idealen Gas, durchgeführt zu denken, vorausgesetzt, daß man ihm keine Eigenschaften beilegt, die den thermodynamischen Gesetzen widersprechen.

Das ideale Gas gestattet infolge seiner einfachen Zustandsgleichung die Arbeit A herzuleiten. Es ergibt sich

$$A = Q_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} = Q_1 \frac{T_2 - T_1}{T_1} \qquad (2)$$

oder

$$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = 0, \qquad (3)$$

wenn man mit Q_2 und Q_1 die Wärmemengen bezeichnet, welche der betreffende Körper bei der Temperatur T_2 aufnimmt und bei der Temperatur T_1 abgibt. Gl. (2) und (3) sind für die Bildung der Entropiegröße, die in der ganzen Thermodynamik, besonders auch für die Herleitung der Methoden zur Temperaturbestimmung fundamentale Bedeutung hat, maßgebend. Würde die Gleichung des idealen Gases in größerer Verallgemeinerung $PV = R \cdot f(T)$ lauten, so müßte in dem Ausdruck für die Arbeit A die Größe $f(T_1)$ statt T_1 und $f(T_2)$ statt T_2 gesetzt werden, und die Funktion f ginge in die Entropiegröße sowie in jede Gleichung zur Definition der Temperatur ein.

Zur Bestimmung der Temperatur geben also nicht die speziellen Eigenschaften des idealen Gases den Ausschlag; entscheidend ist vielmehr nur die Festsetzung der Funktion $f(T)$, die mit den Eigenschaften des idealen Gases in naher Beziehung steht.

b) Gasthermometrie. Als praktische Grundlage der Temperaturmessung dient ein reales Gas, dessen Zustandsgleichung in der Form $PV = RT'$ geschrieben werden kann. Den Unterschied der Größe T' gegen die Temperatur T des idealen Gases gestattet die Thermodynamik zu berechnen. Die Differenz $T - T'$ ist in hohen Temperaturen klein gegen T, solange es sich um ein Gas von tiefer Kondensationstemperatur und geringer Dichte handelt, wie Helium, Wasserstoff, Stickstoff beim Druck von 1 oder 2 Atmosphären.

Für das meist verwendete Gasthermometer konstanten Volumens gilt die Beziehung

$$\frac{P - P_0}{P_{100} - P_0} = \frac{T - T_0}{T_{100} - T_0},$$

oder $P = P_0(1 + \beta t)$, wenn man $t = T - T_0$ und

$$\beta = \frac{P_{100} - P_0}{100\, P_0}$$

setzt. Der Index 0 bezieht sich auf den Gefrierpunkt, der Index 100 auf den normalen Siedepunkt des Wassers.

c) Die schwarze Strahlung. Zweitens kommt für die Messung hoher Temperaturen die Beobachtung der Wärmestrahlung in Betracht, in deren Gesetze, die ebenfalls auf thermodynamischer Grundlage stehen, durch den Ausdruck für die Entropie dieselbe Größe T eingeht, die wir durch das ideale Gas eingeführt haben. Einfache Ausdrücke ergeben sich nur für die sogenannte schwarze Strahlung oder die Strahlung eines schwarzen Körpers. Dieser ist dadurch gekennzeichnet, daß er, wie etwa Ruß, alle auf ihn fallenden Strahlen absorbiert und dem Kirchhoffschen Grundgesetz (siehe unter d 1) zufolge neben diesem maximalen Absorptionsvermögen auch ein maximales Emissionsvermögen besitzt, d. h. er strahlt mehr Energie aus als irgendein anderer Körper unter gleichen Bedingungen.

Die schwarze Strahlung ist, wie Kirchhoff weiter bewies, auch dann vorhanden, wenn jede Stelle des Raumes, den die Strahlung erfüllt und jede Stelle der Wandung, die den Raum begrenzt, sich im Strahlungsgleichgewicht befindet, also in jedem Zeitelement ebensoviel Strahlungsenergie empfängt wie sie abgibt. Die schwarze Strahlung kann demnach in einem geschlossenen Hohlraum erzeugt

werden, dessen Wände gleichmäßige Temperatur besitzen. Ihre Intensität ist dann nur von dieser Temperatur abhängig, nicht dagegen vom Material der Wandung. Diese Strahlung ist der Messung zwar nur durch eine Öffnung des Hohlraumes zugänglich, die mit den aufgestellten Bedingungen streng genommen unverträglich ist. Praktisch kann man sich den theoretischen Forderungen indessen fast beliebig nähern, wenn man die Öffnung im Verhältnis zum ganzen Volumen klein wählt und wenn man die Innenwände des Hohlraumes schwärzt oder doch aus nicht gut und möglichst diffus reflektierendem Material herstellt. Die Öffnung des Hohlraumes wirkt dann wie eine ideale schwarze Fläche, da alle von außen auf die Öffnung fallende Strahlung infolge mehrfacher Reflexion im Innern des Hohlraumes absorbiert wird. Aus diesem Grunde wird der Hohlraum ebenso wie eine ideal schwarze Fläche maximalen Absorptionsvermögens als schwarzer Körper bezeichnet.

Die Bedingungen für die Existenz schwarzer Strahlung sind in der Praxis vielfach verwirklicht, besonders wenn es sich um sehr hohe Temperaturen handelt, da sich alle Temperaturunterschiede durch die Strahlung selbst um so rascher auszugleichen streben, je höher die Temperatur ist. Der theoretischen Forderung kann man sich meist sehr gut annähern, wenn man in den Heizraum ein einseitig geschlossenes Rohr einführt, und die in dessen Innern sich ausbildende Strahlung als „schwarz" betrachtet.

Für die Zwecke der Wissenschaft und der Eichung von Instrumenten bedient man sich nach dem Vorgange von Lummer und Kurlbaum elektrisch geheizter Hohlräume aus Porzellanmasse, deren Temperatur mit Hilfe von Platin-Widerstandsspiralen auf 1400 bis 1500° C gebracht werden kann.

d) Die Strahlungsgesetze. Es sind 4 Fundamentalgesetze der Wärmestrahlung zu unterscheiden:

1. Das Gesetz von Kirchhoff, durch das die Intensität der Wärmestrahlung J' eines beliebigen Körpers vom Absorptionsvermögen A zu der Intensität J der Wärmestrahlung eines schwarzen Körpers in Beziehung gesetzt wird. Sein mathematischer Ausdruck ist

$$J' = A J. \tag{4}$$

Alle drei Größen hängen von der Temperatur T der Körper und von der Wellenlänge λ der Strahlung ab. Die Gleichung gilt nur für den Fall, daß sich J', A und J auf dieselbe Temperatur und dieselbe Wellenlänge beziehen. Unter der Intensität J_λ der Wärmestrahlung sei die Energie eines bestimmten Spektralbereiches verstanden, welche 1 cm² der Oberfläche des betreffenden Körpers pro Sekunde in den räumlichen Winkel 1 ausstrahlt.

2. Das Gesetz von Stefan-Boltzmann. Es sagt aus, daß die über alle Wellenlängen erstreckte gesamte Strahlungsenergie $G = \int_0^\infty J_\lambda d\lambda$ eines schwarzen Körpers der 4. Potenz der absoluten Temperatur proportional ist, so daß

$$G = aT^4. \tag{5}$$

Dies Gesetz wurde von Stefan im Jahre 1879 nach rohen Messungen rein empirisch aufgestellt und ist 1884 von Boltzmann auf thermodynamischer Grundlage in aller Strenge bewiesen. Er gelangte zu dem angegebenen Resultat, indem er die Entropie der Strahlung mit Hilfe des Strahlungsdruckes p berechnete, der sich nach den Maxwellschen Gleichungen und den Beobachtungen Lebedews zu $p = \frac{u}{3}$ ergibt, wenn man mit u die in der Volumeneinheit enthaltene gesamte Strahlungsenergie bezeichnet.

3. Das Wiensche Verschiebungsgesetz. Wien ging von einem idealen thermodynamischen Prozeß aus, bei dem er sich die Strahlung in einem vollkommen spiegelnden Zylinder komprimiert dachte. Er gelangte unter Ansetzung des Strahlungsdruckes und unter Annahme der Wellenlängenverschiebung nach dem Dopplerschen Prinzip in vollkommen strenger Weise zu dem Resultat, daß die in 1 cm³ des Raumes enthaltene Energie $\mathfrak{u}_\nu$ der Strahlung von der Frequenz ν als

$$\mathfrak{u}_\nu = \nu^3 \cdot \varphi\left(\frac{T}{\nu}\right) \tag{6}$$

darstellbar ist. Die Funktion φ blieb unbestimmt, doch ließ sich aus dieser Gleichung die praktisch wichtige Folgerung ziehen, daß das Produkt aus der Wellenlänge λ_m, für die die Energie der schwarzen Strahlung einen Maximalwert besitzt, und der Temperatur T eine Konstante ist, also die Beziehung

$$\lambda_m T = b \tag{6a}$$

gilt. Hierbei wird allerdings schon vorausgesetzt, daß die Strahlungsenergie eines schwarzen Körpers sich bei konstanter Temperatur als Funktion der Wellenlänge durch eine Kurve mit einem deutlichen Maximum darstellen läßt. Der experimentelle Befund stimmt damit überein. Die bolometrische Untersuchung des Spektrums ergab, daß die Strahlungsenergie eines schwarzen Körpers bei sehr kurzen Wellen verschwindend kleine Werte besitzt, mit zunehmender Wellenlänge rasch ansteigt und dann von einer bestimmten Wellenlänge an wieder bis zu 0 abnimmt.

Nach dem Wienschen Gesetz rückt die Wellenlänge maximaler Energie mit steigender Temperatur immer mehr in den kurzwelligen Teil des Spektrums. Diese Verhältnisse werden des näheren durch Fig. 1 veranschau-

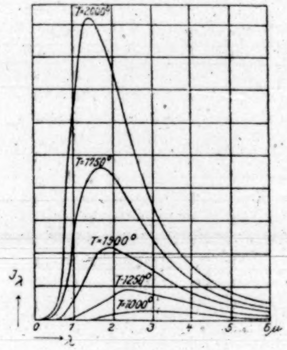

Fig. 1.

licht, in der die Strahlungsintensität als Funktion der Wellenlänge für verschiedene Temperaturen zur Darstellung gebracht ist.

4. Das Plancksche Strahlungsgesetz besitzt von allen Strahlungsgesetzen für die Pyrometrie die größte Bedeutung. Seine theoretische Begründung entbehrt aber des klassischen Bodens, auf dem die unter 1 bis 3 genannten Gesetze aufgebaut sind.

Um die Intensität der Strahlung als Funktion von Temperatur und Wellenlänge darzustellen, bedarf es besonderer Annahmen über die Wirkungsweise der kleinsten Träger der Strahlungsenergie, als welche wir hin- und herschwingende Elektronen, sogenannte Oszillatoren, ansehen. Nach dem Boltzmannschen Theorem von der gleichmäßigen Energieverteilung über alle molekularen Elemente und deren Freiheitsgrade hat die mittlere Energie $\bar{\eta}$ eines linear oszillierenden Elektrons den Wert kT, wenn k das Verhältnis zwischen der molekularen Gaskonstante R und der Avogadroschen Zahl N bezeichnet, also $\bar{\eta} = kT$ und

$$k = \frac{R}{N} = \frac{8{,}315 \cdot 10^7}{6{,}07 \cdot 10^{23}} = 1{,}37 \cdot 10^{-16}.$$

Die mittlere Energie $\bar{\eta}$ der Oszillatoren steht nach der Elektrodynamik in nahem Zusammenhang mit der Energiedichte $\mathfrak{u}_\nu$ der monochromatischen Strahlung von der Frequenz ν, wenn man annimmt, daß jede Geschwindigkeitsänderung zu einer elektromagnetischen Ausstrahlung Anlaß gibt, und zwar ist

$$\mathfrak{u}_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\bar{\eta};$$

c bezeichnet die Lichtgeschwindigkeit. Hiernach wäre die Energiedichte

$$\mathfrak{u}_\nu = \frac{8\pi k}{c^3}\nu^2 T,$$

oder wenn man die Frequenz ν durch die Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{\nu}$ ersetzt,

$$\mathfrak{v}_\lambda = -\mathfrak{u}_\nu \frac{d\nu}{d\lambda} = 8\pi k \lambda^{-4} T.$$

Für die spezifische Strahlungsintensität J_λ eines linear polarisierten Strahles, die mit der Strahlungsdichte $\mathfrak{v}_\lambda$ durch die Beziehung $J_\lambda = \mathfrak{v}_\lambda \frac{c}{8\pi}$ verknüpft ist, erhält man

$$J_\lambda = ck\lambda^{-4}T. \qquad (7)$$

Dieses nach Rayleigh benannte Strahlungsgesetz, das auf den scheinbar so gesicherten Vorstellungen der klassischen Physik beruht, steht mit der Erfahrung in Widerspruch, da es für die Frequenz $\nu = \infty$ bzw. für die Wellenlänge $\lambda = 0$ zu dem Wert ∞ für die Strahlungsintensität J führt, während die Beobachtungen 0 ergeben.

Um Theorie und Erfahrung in Übereinstimmung zu bringen, führte Planck den vollständig umwälzenden Grundsatz ein, daß die Oszillatoren nicht beliebig kleine Energiemengen abgeben, sondern die Energie nur in gewissen Quanten — die zwar sehr klein, aber endlich begrenzt sind — oder deren ganzzahligem Vielfachen ausstrahlen können. Nach der Planckschen Hypothese soll ferner im Gegensatz zur Emission die Absorption kontinuierlichen Charakter haben, d. h. die Oszillatoren sollen die ihnen durch Strahlung zugeführte Energie in beliebigen Teilbeträgen aufnehmen können. Ein Oszillator, auf den Strahlung einwirkt, soll seine Energie ständig der Zeit proportional erhöhen, bis er bei Erreichung eines Energiequantums ε oder dessen ganzzahligem Vielfachen 2ε, 3ε, ... $n\varepsilon$ plötzlich seine ganze Energie durch Ausstrahlung verliert. Ob der Vorgang der Emission eintritt oder nicht, wird durch die Gesetze des Zufalls entschieden. Bezeichnet man mit Z_n die Anzahl derjenigen Oszillatoren, deren Energie im Bereich der Werte von $n\varepsilon$ bis $(n+1)\varepsilon$ liegt, so muß $Z_n < Z_{n-1}$ sein, da beim Überschreiten der Stufe $n\varepsilon$ einige der sehr zahlreichen Oszillatoren Z_{n-1} ausstrahlen und also nicht in den Bereich der Kennziffer n gelangen können. Planck setzt $Z_n = Z_{n-1} - \varkappa Z_{n-1}$ und bezeichnet mit $\varkappa$ eine von n unabhängige Konstante, die mit

der Strahlungsdichte u und einer andern Konstanten p durch die Beziehung $\varkappa = [1 + p u]^{-1}$ verknüpft ist. Dieser Annahme zufolge ist $\varkappa$ sehr klein, wenn die Strahlungsdichte u sehr groß ist. Bei großer Strahlungsintensität ist also Z_n nur sehr wenig kleiner als Z_{n-1}, d. h. es gelangen mehr Oszillatoren auf eine hohe Energiestufe als bei geringer Strahlungsdichte und großem $\varkappa$.

Die beiden willkürlichen Annahmen von der quantenhaften Emission der Energie und von dem speziellen Zusammenhang der Größe $\varkappa$ mit der Strahlungsdichte u führen mittels einer Wahrscheinlichkeitsbetrachtung ohne Hilfe der Elektrodynamik zu der Gleichung

$$u = \frac{1}{p}\left(e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1\right)^{-1},$$

aus der durch Vergleich mit dem Wienschen Gesetz (Gl. 6)

$$u = C\nu^3\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{-1}$$

folgt. Das Energiequantum ist also $\varepsilon = h\nu$. Für unendlich kleine Frequenzen oder unendlich lange Wellen fordert demnach auch die Plancksche Theorie unendliche Teilbarkeit der Energie, wie sie Rayleigh bei der Ableitung seiner Formel voraussetzte.

Ersetzt man die Frequenz ν durch die Wellenlänge λ, so erhält man den Planckschen Ausdruck für die spezifische Intensität der linear polarisierten Strahlung bei der Wellenlänge λ und der Temperatur T zu

$$J_\lambda = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1}.$$

Diese Gleichung, die für sehr große Wellenlängen in die Rayleighsche Beziehung Gl. (7) übergeht, wenn man $c_1 = hc^2$ setzt, ist in jeder Hinsicht durch das Experiment bestätigt worden. Insbesondere hat sich die für die Gestalt der Energiekurven (Fig. 1) charakteristische Größe $\frac{hc}{k} = c_2$ in weiten Grenzen als unabhängig von Temperatur und Wellenlänge erwiesen.

Nach den Beobachtungen von Warburg und Müller[1]) gilt zurzeit als wahrscheinlichster Wert $c_2 = 1{,}43$ cm grad. Die Konstante $c_1 = hc^2$ findet man durch Beobachtung der Gesamtstrahlungsenergie E, die von 1 cm² eines schwarzen Körpers pro Sekunde in den hemisphärischen Raum gesandt wird. Es ist

$$E = 2\pi \int_0^\infty J_\lambda d\lambda = 12{,}99 \frac{\pi k^4}{c^2 h^3} T^4 = \sigma T^4.$$

1) Warburg u. Müller, Ann. d. Phys. 48, 410 bis 432, 1915.

Als bester Wert der Konstanten σ gilt die Zahl $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-5}$ erg. cm^{-2} sec^{-1} grad^{-4}. Aus den beiden Gleichungen

$$c_2 = \frac{hc}{k} = 1{,}43 \quad \text{und} \quad \sigma = 12{,}99 \frac{\pi k^4}{c^2 h^3} = 5{,}7 \cdot 10^{-5}$$

folgt $h = 6{,}49 \cdot 10^{-27}$ und $k = 1{,}36 \cdot 10^{-16}$ in absoluten Einheiten. Aus der Gaskonstanten und der Avogadroschen Zahl[1]) ergibt sich, wie bereits erwähnt, $k = 1{,}37 \cdot 10^{-16}$. Die ausgezeichnete Übereinstimmung der auf so verschiedenen Wegen für k gefundenen Zahlengrößen bietet eine hervorragende Bürgschaft für die Stichhaltigkeit der Planckschen Hypothesen.

Die Plancksche Gleichung findet die wichtigste Anwendung im Gebiet sichtbarer Strahlung also für Wellenlängen zwischen $\lambda = 0{,}45$ und $0{,}75\,\mu$. In dem Ausdruck für die Strahlungsintensität J besitzt dann die Exponentialgröße bei allen in Betracht kommenden Temperaturen einen die Größe 1 so erheblich überragenden Wert, daß man mit ausreichender Genauigkeit

$$J_\lambda = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \tag{8}$$

setzen darf. Bei konstanter Wellenlänge folgt hieraus das Intensitätsverhältnis J/J_0 bei zwei verschiedenen Temperaturen T und T_0 zu

$$\frac{J}{J_0} = e^{\frac{c_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)} \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda}{c_2} \ln \frac{J}{J_0} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}. \tag{8a}$$

II. Meßinstrumente und Meßmethoden.

a) Allgemeines. Die Instrumente zur praktischen Messung hoher Temperaturen gliedern sich in zwei Gruppen. Diejenigen der ersten Gruppe, die Berührungsthermometer, stehen bei der Messung mit ihrem wesentlichsten Teil im thermischen Gleichgewicht mit dem Raum, dessen Temperatur bestimmt werden soll. Die Instrumente der zweiten Gruppe, die Strahlungsthermometer, messen aus der Entfernung. Sie zeigen die Intensität der Strahlung jenes Raumes an und befinden sich mit allen ihren Teilen nahezu auf Zimmertemperatur. Die obere Grenze für die Brauchbarkeit der Berührungsthermometer ist diejenige Temperatur, bei der die Angaben der Thermometer infolge nicht reversibler Änderungen der thermometrischen Substanz unsicher werden. In sehr hohen Temperaturen sind darum allein die Strahlungsthermometer verwendbar. Sie besitzen ferner den Vorteil, daß ihre Angaben nach voraufgegangener Eichung bei ein oder zwei Temperaturen sich

1) Die Avogadrosche Zahl ist aus dem elektrochemischen Äquivalent und dem Wert für die elektrische Ladung des Elektrons nach Millikan abgeleitet.

auf eine Formel gründen lassen, welche direkt die thermodynamische Temperatur liefert. Die Berührungsthermometer dagegen, deren Angaben darauf beruhen, daß sich irgendeine charakteristische Größe (Länge, Volumen, Thermokraft, elektrischer Widerstand) eines gasförmigen, flüssigen oder festen Körpers mit der Temperatur ändert, erfordern eine Eichung an vielen Temperaturpunkten und gleichzeitig die Aufstellung einer empirischen, durch keine Theorie festgelegten Interpolationsformel zwischen den Angaben des Thermometers und der Temperatur. Die Eichung muß auf das Gasthermometer gegründet werden. —

Indessen darf nicht vergessen werden, daß auch die Eichung der Strahlungsthermometer auf das Gasthermometer zurückgehen muß, und zwar gleichgültig, ob sie auf der Anwendung des Stefanschen Gesetzes oder der Planckschen Strahlungsgleichung beruhen. Jedes Strahlungsthermometer könnte zwar rein theoretisch unabhängig vom Gasthermometer an den thermometrischen Fundamentalpunkten, dem Gefrierpunkt und normalem Siedepunkt des Wassers, geeicht werden; doch ist unter diesen Bedingungen die Gesamtstrahlung sehr gering und die Teilstrahlung im Bereich sichtbarer Wellen nicht nachweisbar, so daß man gezwungen ist, für die Eichung mindestens eine höhere Temperatur, etwa diejenige des Goldschmelzpunktes, heranzuziehen, die nur durch das Gasthermometer festgelegt werden kann.

b) Eichung. Mit dem Gasthermometer sind zur Aufstellung thermometrischer Fixpunkte eine Reihe von Schmelz- und Siedepunkten solcher Körper bestimmt worden, die leicht in chemisch reiner Form zu beschaffen sind. Zur Eichung von Thermometern für hohe Temperaturen kommen nach den Festsetzungen der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt folgende Fixpunkte in Betracht:

Siedepunkt des Schwefels beim Luftdruck p mm Quecksilber:

$$t = 444^0{,}55 + 0{,}0908\,(p - 760) - \\ - 0{,}000047\,(p - 760)^2 .$$

Schmelzpunkte:

Zink . .	$419{,}4^0$	Kupfer . .	1083^0
Antimon .	630	Palladium .	1557
Silber . .	960,5	Platin . . .	1764
Gold . .	1063		

Zink, Antimon, Silber und Kupfer muß man wegen ihrer leichten Oxydierbarkeit bzw. starken Neigung zur Sauerstoffabsorption in reduzierend wirkenden Graphittiegeln schmelzen. Gold schmilzt auch im Porzellantiegel einwandfrei.

In die Schmelze dieser Metalle wird das zu eichende Berührungsthermometer hineingesteckt (Tiegelmethode). Der Fixpunkt macht sich dadurch kenntlich, daß bei langsamer Abkühlung im Augenblick des Erstarrens infolge Abgabe latenter Wärme Temperaturkonstanz eintritt.

Die Fixpunkte von Palladium und Platin bestimmt man nach der sog. Drahtmethode, da von diesen kostbaren Metallen im allgemeinen nur geringe Mengen vorhanden sind. Im Falle des Palladiums schmilzt man an die beiden Enden eines etwa 2 cm langen Drahtstückchens aus diesem Metall etwa 50 cm lange Drähte aus Platin und führt das zwischen den Platinschenkeln befindliche Palladium in einen möglichst gleichförmig geheizten elektrischen Ofen, in den gleichzeitig das zu eichende Thermometer gebracht wird, oder dessen Strahlung man beobachtet. Die Temperatur des Ofens wird langsam erhöht, bis der Palladiumschmelzpunkt erreicht ist. Dieser Augenblick gibt sich leicht durch Öffnen eines schwachen Stromes kund, den man durch die Platinschenkel hindurchschickt. In demselben Augenblick müssen die Angaben des Prüfthermometers abgelesen werden. — Die Schmelztemperatur des Platins kann man in der gleichen Weise kenntlich machen, wenn man ein Platindrähtchen zwischen Schenkeln aus einem Metall höherer Temperaturbeständigkeit, etwa einer Legierung von Platin mit 10 oder 20 Proz. Rhodium, einschmilzt. — Die Drahtmethode hat dem Schmelzvorgang im Tiegel gegenüber den großen Nachteil, daß keine Temperaturkonstanz eintritt.

c) Berührungsthermometer. Die wichtigsten hochgradigen Berührungsthermometer der Praxis sind das Thermoelement und das Widerstandsthermometer.

1. Gasthermometer. Bei gewissen Versuchen, nämlich bei Messung der Explosionstemperatur von Gasgemischen, hat man sich allerdings sogar einer Art Gasthermometer konstanten Volumens bedient, weil hier die Aufgabe vorliegt, bei der äußerst geringen Dauer des Verbrennungsvorganges eine Thermometersubstanz von sehr geringer Trägheit zu verwenden. Es dient dazu das verbrannte Gas selber, dessen Druck bei Zimmertemperatur durch ein gewöhnliches Manometer und bei der Explosionstemperatur durch die Ausbiegung einer dünnen Stahllamelle gemessen wird. Diese trägt einen leichten Spiegel, so daß die Bewegung der Lamelle an der Verschiebung eines Lichtzeigers deutlich wahrnehmbar gemacht

werden kann. Auf diese Weise sind Temperaturen bis zu $t = 4600^0$ gemessen worden.

2. Hochgradige Quecksilberthermometer. Bisweilen werden bis 700^0 Quecksilberthermometer benutzt. Um den bei 357^0 liegenden Siedepunkt des Quecksilbers heraufzusetzen, muß das Thermometer unter erhöhtem Gasdruck (bis 40 Atm.) gefüllt werden. Gefäß und Kapillare werden für Thermometer bis 700^0 aus Quarzglas hergestellt. Jenaer Verbrennungsröhrenglas ist bis 600^0 verwendbar, Jenaer Glas 59III bis 525^0.

3. Das Thermoelement. Werden zwei Drähte verschiedenen Metalles zu einem Kreis zusammengefügt, und bringt man die beiden Lötstellen auf verschiedene Temperatur, so entsteht in dem Drahtkreis eine elektromotorische Kraft, die lediglich von der Temperatur der Lötstellen, aber nicht von dem Temperaturgefälle längs der Drähte abhängt. Zwecks Messung dieser thermoelektrischen Potentialdifferenz verschweißt man die beiden Metalle nur an einem Ende miteinander, während man an das andere Ende jeden Drahtes Kupferzuleitungen lötet, die zu dem Meßinstrument B (Fig. 2) führen. Die Hauptlötstelle L_1 bringt

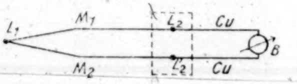

Fig. 2.

man mit dem Raum in Berührung, dessen Temperatur bestimmt werden soll. Die Nebenlötstellen L_2 und L_2' hält man durch ein Flüssigkeitsbad oder besser durch schmelzendes Eis auf gleicher Temperatur, so daß die Zusatzthermokräfte, die durch Berührung der offenen Schenkel mit den Kupferdrähten auftreten, sich gerade aufheben.

Die geringe Ausdehnung der Lötstelle bietet den Vorteil, die Temperatur an einer scharf definierten Stelle messen zu können, falls man dafür sorgt, daß die Wärmeleitung der Metallschenkel keine Fehler verursacht. Vielfach ist es aber nicht möglich, das Thermoelement ohne elektrisch isolierende Schutzhülle zu verwenden, wodurch dann wegen Vergrößerung der Wärmekapazität und der Wärmeableitung der erwähnte Vorteil zum großen Teil wieder verloren geht.

Solcher Schutzhüllen bedient man sich in der Technik schon aus dem Grunde, um die dünnen Drähte vor mechanischen Verletzungen zu bewahren. Gleichzeitig aber ist es oft nötig, die Schenkel des Thermoelements gegen Dämpfe abzusperren. Diese wirken besonders dann schädlich auf das Thermoelement ein, wenn sie Metalle oder Kohle enthalten, mit denen sich die Drähte des Thermoelementes legieren. Gewöhnlich tritt die Legierung an den Stellen des größten Temperaturgefälles ein. Die Metalle werden verunreinigt und es entstehen thermoelektrische Zusatzkräfte, die sich den elektromotorischen Kräften der Lötstellen L_1, L_2 und L_2' überlagern. Die Erfahrung lehrt, daß reine Metalle in diesem Sinne besonders thermoelektrisch empfindlich sind, Legierungen weit weniger. — Wenn ein Element auf die geschilderte Weise verdorben ist, so bleibt als einziges Heilmittel übrig, die verunreinigten Enden der Drähte zu entfernen und eine neue Hauptlötstelle L_1 herzustellen. Wollte man dem Element die ursprüngliche Länge lassen und nur eine neue Eichung vornehmen, so würden damit die Unsicherheiten nicht beseitigt, da die Zusatzthermokräfte nicht allein von der Stärke der Verunreinigungen, sondern auch von dem Temperaturgefälle längs des veränderten Drahtstückes abhängen. Sie treten nicht in die Erscheinung, wenn das Temperaturgefälle zum Verschwinden gebracht wird.

Die Schutzröhren, die das Thermoelement vor Verunreinigungen durch Legierung bewahren sollen, müssen undurchlässig für Gase sein. Es kommen dafür Röhrchen aus glasiertem Porzellan oder glasierter Marquardtscher Masse der Berliner Porzellanmanufaktur in Betracht. Letztere sind bis 1500^0 brauchbar. Besser ist Quarzglas, das man bis 1600^0 anwenden kann, allerdings nur unter häufiger Erneuerung der Röhrchen, da Quarz beim Erkalten in eine sehr brüchige Modifikation (Tridymit) übergeht. In der Nachbarschaft von Kohle, also insbesondere in einem Kohleofen, sind Schutzröhrchen aus Marquardtscher Masse nicht brauchbar, da ihr Schmelzpunkt dann infolge chemischer Veränderung erheblich herabgedrückt wird.

In elektrischen Öfen sehr hoher Temperatur tritt leicht noch eine andere Fehlerquelle für das Thermoelement auf, die darauf zurückzuführen ist, daß oberhalb 1100^0 auch alle sogenannten Isolatoren elektrisch zu leiten beginnen und es deshalb oft schwer zu vermeiden ist, daß ein Teil des Heizstromes in die Drähte des Thermoelementes gelangt. Eine einwandfreie Isolation ist in diesem Falle nur möglich, wenn das Thermoelement, ohne die Wandung zu berühren, frei in den Ofen gehängt wird. Ist dies nicht angängig, so ist es wünschenswert den Heizstrom kommutieren zu können. Mittelt man dann die am Thermoelement beobachteten Spannungen bei verschiedener Stromrich-

tung, so gelangt man zu einem annähernd richtigen Wert für die Thermokraft.

Für hohe Temperaturen ist das Thermoelement von Le Chatelier das wichtigste. Der eine Schenkel dieses Elementes besteht aus reinem Platin, der andere aus einer Legierung von Platin mit 10 Proz. Rhodium. Nachdem die Methoden zur reinen Herstellung des Platins von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt angegeben sind, unterscheiden sich die von der Firma W. C. Heräus in Hanau gelieferten Le Chatelierschen Elemente (Drahtdurchmesser 0,6 mm) in ihrer Thermokraft nur um wenige Promille.

Befindet sich die Hauptlötstelle auf der Temperatur t^0, die Nebenlötstellen auf 0^0, so gilt für die elektromotorische Kraft e zwischen $t = 300$ und $t = 1600^0$ die Formel

$$e = -184 + 7{,}5145\,t + 0{,}002852\,t^2 - \\ - 0{,}0000006068\,t^3 .$$

Dieser Ausdruck (den ich im wesentlichen der Liebenswürdigkeit des Herrn Geheimrat Holborn verdanke), ist durch Umrechnung der Beobachtungsdaten von Holborn und Day[1]), Holborn und Valentiner[2]) sowie Day und Sosman[3]) auf die unter II b definierte Temperaturskala der Reichsanstalt gewonnen.

Das ziemlich kostspielige Le Chateliersche Thermoelement kann man bis 700^0 durch ein solches aus Silber und Konstantan ersetzen. Die Kombination Kupfer-Konstantan ist wegen der leichten Oxydierbarkeit des Kupfers nur bis 350^0 wirklich zuverlässig und gilt über 600^0 als unbrauchbar. Bis 1100^0 hat sich ein Element bewährt, dessen einer Schenkel aus Nickel, dessen anderer aus einer Legierung von Nickel mit 10 Proz. Chrom besteht. Bei allen Elementen mit Nickel ist zu beachten, daß dies Metall bei etwa 325^0 einen Umwandlungspunkt besitzt, der sich auch durch einen Sprung in der Thermokraft bemerkbar macht.

Befindet sich die Hauptlötstelle auf 500^0, die Nebenlötstellen auf 0^0, so gelten für einige Metallkombinationen annähernd folgende Thermokräfte in Millivolt

Pt/90 *Pt*, 10 *Rh*	4,21	*Fe*/Konstantan	27
Ni/90 *Ni*, 10 *Cr*	10	*Ag*/Konstantan	28
Fe/*Ni* . . .	12	*Cu*/Konstantan	28

Die genauen Werte der elektromotorischen Kräfte müssen durch besondere Eichung bestimmt werden.

1) Holborn u. Day, Ann. d. Phys. **2**, 505—545, 1900.
2) Holborn u. Valentiner, Ann. d. Phys. **22**, 1—48, 1907.
3) Day u. Sosman, Am. Journ. of Science **26**, 405—463, 1908.

Zur Interpolation zwischen den Eichpunkten haben sich für nicht zu große Temperaturbereiche besonders die Formeln von Avenarius: $e = at + bt^2$ und von Holman $e = at^b$ bewährt, welche die thermoelektrische Kraft e als Funktion t der Temperatur der Hauptlötstelle darstellen, wenn sich die Nebenlötstellen auf 0^0 befinden.

Vor Durchführung der Eichung erhitzt man die Drähte zweckmäßig einige Zeit über die höchste Temperatur hinaus, die noch gemessen werden soll. Das Material wird dadurch „gealtert", d. h. es wird in seiner Kristallstruktur und gleichzeitig in seinem thermoelektrischen Verhalten auf diese Weise schnell in einen Zustand übergeführt, den es bei häufigem Erhitzen auf tiefere Temperatur erst nach und nach und unter ständiger langsamer Änderung der Thermokraft erlangt.

4. Widerstandsthermometer. Während das Thermoelement sehr einfach zu handhaben ist und zur Ablesung seiner elektromotorischen Kraft e nur ein empfindliches Zeiger-Voltmeter erfordert, verlangt das Widerstandsthermometer eine größere Meßeinrichtung (Kompensationsapparat, Normalwiderstand, Galvanometer, Akkumulator), mit deren Hilfe es allerdings auch erheblich weitergehenden Ansprüchen an Genauigkeit gerecht wird. Als Widerstandsmaterial dient bisher fast ausschließlich Platin, dessen elektrischer Temperaturkoeffizient zwischen 0^0 und 100^0 etwa 0,0039 beträgt, mit wachsender Temperatur aber abnimmt. Wird eine Sicherheit von $0{,}1^0$ gefordert, so muß also der Widerstand auf mindestens 0,0004 seines Wertes bestimmt werden.

Man wickelt einen etwa 100 cm langen und 0,1 bis 0,2 mm dicken Platindraht auf einen Isolierkörper — am besten ein vierseitiges Porzellanprisma mit gezähnten Kanten — und lötet an die Enden des Platindrahtes, der stets in seiner ganzen Länge auf die gesuchte Temperatur gebracht wird, je zwei Zuleitungen aus Platin- oder Silberdrähten. Auf diese Weise ist es möglich, den Widerstand nach der Potentialmethode zu messen und somit den Zuleitungswiderstand, dessen Bestimmung stets mit gewissen Unsicherheiten behaftet ist, zu eliminieren.

Unterhalb 500^0 erreicht man mit dem Platin-Widerstandsthermometer leicht eine Genauigkeit von $0{,}01^0$. Neben den ausgezeichneten physikalischen und chemischen Eigenschaften des Platins ist diese bemerkenswerte Tatsache dem Umstand zu verdanken, daß der Widerstand des Platins zwischen 0 und 500^0 mit scheinbar unbegrenzter Zuverlässigkeit als eine quadratische Funktion der Temperatur t dar-

stellbar ist. Dementsprechend genügt eine Eichung des Thermometers an drei Punkten. Als diese wählt man gewöhnlich den Eis- und Siedepunkt des Wassers sowie den Siedepunkt des Schwefels.

Die Platinthermometer sind gelegentlich erheblich über 500°, nämlich bis 1100°, angewendet worden; doch erleiden sie oberhalb 900° dauernde Änderungen des Widerstandes, die teils auf mechanische Einflüsse, teils auf solche chemischer Art, nämlich Aufnahme von Verunreinigungen, zurückzuführen sind. Bisher hat noch nicht mit Sicherheit festgestellt werden können, ob die quadratische Beziehung zwischen Widerstand und Temperatur bis zu jenen hohen Wärmegraden streng gilt; es scheint, als ob sich bei 1100° Abweichungen im Betrage von 1 bis 2° bemerkbar machen.

Wahrscheinlich läßt sich das Widerstandsthermometer für diese hohen Temperaturen noch verbessern; oberhalb 1100° aber wird es kaum mit dem Thermoelement in Wettbewerb treten können, da es gegen Zerstäubung und Isolationsmängel ungleich empfindlicher ist als dieses.

d) Strahlungsthermometer. Beschränkt man sich auf die zur praktischen Messung der Temperatur geeigneten Strahlungsthermometer, so kommen im wesentlichen 4 Instrumente in Betracht, von denen eines, das Pyrometer von Féry, auf der Messung der Gesamtstrahlung beruht, alle andern dagegen auf Helligkeitsmessungen im sichtbaren Spektralbereich gegründet sind.

1. Gesamtstrahlpyrometer. Das Pyrometer von Féry besteht in seiner gebräuchlichsten Ausführung aus einem (vergoldeten) Hohlspiegel, der die Strahlung des glühenden Körpers auf die Hauptlötstelle eines Eisen-Konstantan-Elementes konzentriert, welche durch ein geschwärztes Silberplättchen verbreitert ist.

Soll das Pyrometer empfindlich sein, so muß der Lötstelle des Thermoelements beträchtliche Energie zugeführt werden. Das kann nur durch einen verhältnismäßig großen Spiegel geschehen, der wiederum eine große freie Öffnung des Strahlers erfordert. Denn der Spiegel muß stets ganz mit Strahlung ausgefüllt sein, damit das Instrument unabhängig von der Entfernung der Strahlungsquelle ist.

Die elektromotorische Kraft des Thermoelements, dessen Nebenlötstellen sich auf Zimmertemperatur befinden, kann im wesentlichen der 4. Potenz der gesuchten absoluten Temperatur ($T = t + 273$) proportional gesetzt werden. Eine geringe Abweichung von diesem Gesetz wird dadurch hervorgerufen, daß der Goldspiegel nicht alle Strahlen gleich gut reflektiert, sondern die langwelligen bevorzugt.

Das Pyrometer ist bis herab zu 400° brauchbar. Da seine Angaben dem Stefan-Boltzmannschen Strahlungsgesetz (I d 2) nicht genau folgen, so muß es bei mehreren Temperaturen geeicht werden.

2. Optische Pyrometer. Größere Zuverlässigkeit besitzen die optischen Pyrometer, deren Prinzip auf der Helligkeitsmessung in einem begrenzten Spektralbezirk beruht. Ihre Empfindlichkeit ist beträchtlich, da die Helligkeit J_λ des schwarzen Körpers sehr schnell mit der Temperatur steigt. Setzt man seine Helligkeit im gelben Licht ($\lambda = 0{,}59\,\mu$) bei $t = 600°$ als Einheit an, so beträgt sie in derselben Farbe bei $t = 1000°$ bereits $6{,}55 \cdot 10^3$, bei $t = 2000$ ist $J_\lambda = 3{,}02 \cdot 10^7$, bei $t = 3000°$ ist $J_\lambda = 8{,}02 \cdot 10^8$, bei $t = 6000°$ ist $J_\lambda = 2{,}84 \cdot 10^{10}$.

Von den optischen Pyrometern hat dasjenige von Holborn und Kurlbaum die größte Verbreitung gefunden. Zunächst mögen indessen die Instrumente von Le Chatelier und Wanner besprochen werden, da sie sich direkt auf die Anwendung der Strahlungsgleichung (8a) gründen. Bei beiden kommt es wesentlich auf die Bestimmung eines Helligkeitsverhältnisses J/J_0 an. Daraus folgt, daß jedes Instrument eine Vergleichslichtquelle konstanter Helligkeit und eine Vorrichtung zur meßbaren Schwächung des Lichtes besitzen muß, durch die es möglich ist, zwei benachbarte Flächenstücke durch den Strahler und die Vergleichslichtquelle dem Photometerprinzip entsprechend gleich stark zu beleuchten. Die Beobachtung findet in möglichst einfarbigem Licht statt, da die im weißen Licht vorhandenen Farbenunterschiede der verschiedenen Lichtquellen die Messung erschweren.

2 α) Das Pyrometer von Le Chatelier ist ähnlich angeordnet wie das Photometer von Lummer und Brodhun. Die Intensität einer der beiden Lichtquellen wird durch graue Absorptionsgläser oder eine Irisblende mit ablesbarer Verstellung so weit abgeschwächt, bis beide im Gesichtsfeld befindlichen Flächen gleich hell erscheinen. Die Wellenlänge, bei der die Beobachtung stattfindet, wird durch ein farbiges Glas, das vor das Okular gesetzt wird, bestimmt. Man eicht das Instrument dadurch, daß man bei konstanter Helligkeit der Vergleichslampe und einem strahlenden schwarzen Körper der Temperatur T_0 als Objekt den Schwächungsfaktor B_0 feststellt, um den die Intensität des Strahlers vermindert werden muß, damit alle Teile des Gesichtsfeldes gleiche Helligkeit besitzen. Findet man dann bei unveränderter Farbe (Wellenlänge) für einen andern Strah-

lungszustand des schwarzen Körpers den Schwächungsfaktor B, so gilt für die zugehörige Intensität J bzw. Temperatur T im Anschluß an Gleichung (8a) die Beziehung

$$\ln \frac{B}{B_0} = \ln \frac{J}{J_0} = \frac{c_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right). \quad (9)$$

Ist das Instrument mit einer Irisblende ausgerüstet, so wird das Verhältnis $\frac{B}{B_0}$ durch das Verhältnis der Blendenöffnungen gemessen. Die Irisblende kann man durch 2 gegeneinander verschiebbare keilförmige Platten aus dunklem Glase ersetzen, die einer absorbierenden Scheibe variabler Dicke gleichwertig sind. Bezeichnet man mit D die Dicke der Scheibe und mit $\varkappa$ ihren Absorptionskoeffizienten, so ist die Absorption B der Größe $e^{\varkappa D}$ proportional und für $\ln B/B_0$ ist $\varkappa\,(D-D_0)$ zu setzen. Unter Einführung der Abkürzungen

$$C_1 = \frac{1}{T_0} + \frac{\lambda\varkappa}{c_2} D_0 \text{ und } C_2 = \frac{\lambda\varkappa}{c_2}$$

geht Gleichung (9) in die Form

$$\frac{1}{T} = C_1 - C_2 D \quad (9a)$$

über. Die Konstanten C_1 und C_2 sind nach Kenntnis des Absorptionskoeffizienten $\varkappa$ zu berechnen, doch können sie auch durch Eichung des Instruments bei zwei bekannten Temperaturen bestimmt werden. Gleichung (9a) gestattet die Temperatur T in besonders einfacher Weise aus der Dicke D der absorbierenden Glasschicht zu ermitteln.

2β) Das Pyrometer von Wanner ist dem Königschen Spektralphotometer nachgebildet. Die strahlende Fläche unbekannter Temperatur wird mit einer beleuchteten Metallglasscheibe verglichen, deren stets gleichbleibende Helligkeit von einer kleinen Glühlampe (4 Volt) stammt. Beide Strahlenbündel fallen durch ein geradsichtiges Polarisationsprisma. Dadurch wird jedes von ihnen in ein Farbenband und zwei senkrecht zueinander polarisierte Strahlen zerlegt. Durch Ausblendung eines schmalen Wellenlängenbereichs (meist um die rote Wasserstofflinie $\lambda = 0{,}656\,\mu$) und Fortschaffung je eines der polarisierten Teilstrahlen wird das ganze Gesichtsfeld von Licht gleicher Farbe erhellt, das aber für beide Hälften des Feldes entgegengesetzten Polarisationszustand besitzt und von verschiedenen, nämlich den beiden zu vergleichenden, Lichtquellen stammt. Durch Drehen eines Analysators, der über einer Winkelteilung beweglich ist, kann man beide Hälften des Gesichtsfeldes auf gleiche Helligkeit einstellen.

Um das Prinzip der Messung vollständiger zu erläutern, seien mit OS_0 (Fig. 3) und OS

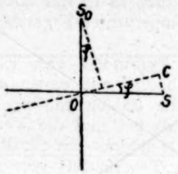

Fig. 3.

die Amplituden und Polarisationsrichtungen der beiden Lichtstrahlen vor dem Analysator bezeichnet. Dreht man den Analysator mit seiner Polarisationsrichtung in die Stellung OC und setzt man den Winkel $COS = \varphi$, so besitzen die in das Gesichtsfeld gelangenden beiden Strahlen die Amplituden $OS \cdot \cos\varphi$ und $OS_0 \sin\varphi$. Nun verhalten sich die Intensitäten wie die Quadrate der Amplituden. Also besteht zwischen dem Intensitätsverhältnis J_0/J der beiden Lichtstrahlen S_0 und S vor dem Analysator und ihrem Intensitätsverhältnis J_0'/J' hinter dem Analysator die Beziehung $\frac{J_0'}{J'} = \frac{J_0}{J}\,\mathrm{tg}^2\varphi$. Stellt man nun den Analysator auf Helligkeitsgleichheit im Gesichtsfeld ein, so daß $J_0' = J'$ ist, so ergibt sich das Helligkeitsverhältnis

$$\frac{J}{J_0} = \mathrm{tg}^2\varphi. \quad (10)$$

Der Nullpunkt der Winkelteilung des Analysators ist durch maximale Helligkeit der einen oder maximale Dunkelheit der andern Hälfte des Gesichtsfeldes gekennzeichnet. Die Konstanten des Instruments, zu denen die Intensität J_0 des zur Vergleichung dienenden Lichtstrahls gehört, müssen durch Eichung festgelegt werden. Zu dem Zweck richtet man das Instrument auf einen schwarzen Körper der bekannten Temperatur T_1. Bezeichnet man die Lichtintensität des schwarzen Körpers im Wellenlängenbereich des Pyrometers mit J_1 und den Einstellungswinkel des Analysators mit φ_1, so erhält man $J_1/J_0 = \mathrm{tg}^2\varphi_1$. Es ist also nach den Gleichungen (9) und (10)

$$\ln J/J_1 = \ln \frac{\mathrm{tg}^2\varphi}{\mathrm{tg}^2\varphi_1} = \frac{c_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T}\right)$$

oder

$$\ln \mathrm{tg}\,\varphi = a - \frac{b}{T}, \quad (11)$$

wenn man $a = \frac{1}{2}\frac{c_2}{\lambda T_1} + \ln \mathrm{tg}\,\varphi_1$ und $b = \frac{c_2}{2\lambda}$ setzt.

Die Konstanten a und b sind bei Kenntnis der

Temperatur T_1, der Wellenlänge λ und der Strahlungskonstanten c_2 berechenbar. Zieht man vor, sie mit dem Pyrometer selbst empirisch zu ermitteln, so ist nur nötig, die zu zwei bekannten Temperaturen T gehörigen Winkel φ zu bestimmen.

2 γ) Das Pyrometer von Holborn und Kurlbaum beruht auf einem etwas andern Prinzip als die beiden soeben besprochenen Instrumente, da bei ihm die Vergleichslampe stets auf die Helligkeit des Strahlers gebracht wird, dessen Temperatur gemessen werden soll. Mit diesem Instrument beobachtet man nicht die Helligkeit einer vom Objekt beleuchteten Fläche, sondern man blickt auf das Objekt selbst, das man mit allen Einzelheiten wahrnimmt, so daß man das Pyrometer leicht auf jeden beliebigen Teil des Strahlers richten kann. Allerdings ist die Eichung etwas weniger einfach als bei den Pyrometern von Le Chatelier und Wanner. Es ist nämlich erforderlich, den schwarzen Körper je nach dem Meßbereich bei 3 oder 4 bekannten Temperaturen zu beobachten, um eine empirische Beziehung zwischen der Temperatur des schwarzen Körpers und der Stromstärke, die bei Einstellung des Instruments durch die Glühlampe fließt, ermitteln zu können. Meist genügt es, die Stromstärke als quadratische Funktion der Temperatur darzustellen, so daß eine Eichung an drei Punkten ausreicht.

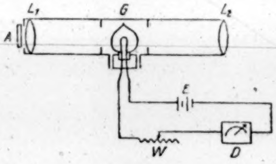

Fig. 4.

Fig. 4 veranschaulicht das Prinzip des Pyrometers: Man stellt die Okular- und Objektivlinse L_1 und L_2 so ein, daß ein Bild des Objekts am Ort der Glühlampe G entsteht, und daß Objekt und Glühlampe gleichzeitig vom Auge deutlich gesehen werden, das durch das Farbglas A blickt. Dann reguliert man durch Verschiebung des Gleitwiderstands W die Stromstärke des Glühlampenkreises, die durch das Instrument D gemessen wird, bis die Spitze des Glühfadens die gleiche Helligkeit wie ihr leuchtender Hintergrund besitzt. Die dunklen Enden des Fadens weisen deutlich auf die Stelle hin, der sich die Aufmerksamkeit zuwenden muß.

Da in diesem Pyrometer die Strahlung weder spektral zerlegt noch durch Nikols geschwächt wird, so ist die erzielte Lichtstärke erheblich größer als bei dem Pyrometer von Wanner. Es ermöglicht Messungen bis herab zu 650°.

Der Meßbereich des Pyrometers läßt sich fast beliebig ausdehnen, wenn man Absorptionsgläser verwendet, die zur Abschwächung der Lichtintensität des Strahlers vor die Objektivlinse L_2 gesteckt werden. Die Eichung der Absorptionsgläser kann mit Hilfe des Instruments selbst erfolgen, indem man zunächst ohne Absorptionsglas die wahre Temperatur T_1 eines schwarzen Körpers und dann nach Einschaltung des Absorptionsglases die scheinbare Temperatur T_2 des unverändert gebliebenen schwarzen Körpers beobachtet. Für das Verhältnis der unter diesen beiden Bedingungen ins Auge gelangenden Intensitäten J_1 und J_2 gilt nach Gl. (8a) die Beziehung

$$\ln J_1/J_2 = \ln V = \frac{c_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right).$$

Hierin bedeutet V das Schwächungsverhältnis des grauen (Rauch-)Glases und λ die dem Farbglas zugehörige Wellenlänge. Nachdem V durch die Kenntnis zweier Temperaturen T_1 und T_2 gewonnen ist, die innerhalb der Eichgrenzen des Pyrometers liegen, kann man unter Verwendung desselben Rauchglases eine höher gelegene Temperatur T_1 bestimmen, wenn nur T_2 noch innerhalb der Eichgrenzen bleibt. Durch Kombination mehrerer Absorptionsgläser lassen sich mit dem Instrument Temperaturen bis zu mehreren Tausend Grad messen, während die direkte Eichung sich im allgemeinen nur bis $T = 1500 + 273^0$ erstreckt.

Bei Verwendung eines Absorptionsglases muß man die Wellenlänge des Farbglases A kennen, die sonst in rechnerischer Hinsicht von untergeordneter oder gar keiner Bedeutung ist. Im allgemeinen ist sie mit Hilfe eines Spektrometers genau genug feststellbar. Für Messungen größter Feinheit ist ein Pyrometer mit spektraler Zerlegung erwünscht. Ein solches Spektralpyrometer, das das Prinzip des Instruments von Holborn und Kurlbaum beibehält, ist vom Verfasser[1]) angegeben und bei zahlreichen Messungen benutzt worden.

e) Strahlungspyrometrie nicht schwarzer Körper. Sobald der Strahler, dessen Temperatur gemessen werden soll, sich nicht im Wärmegleichgewicht mit seiner Umgebung befindet oder nicht das Absorptionsvermögen $A = 1$ für alle Wellenlängen besitzt, kann man mit den besprochenen Strahlungspyrometern nicht die

1) F. Henning, Temperaturmessung S. 175. Braunschweig 1915.

wahre Temperatur des betreffenden Körpers ermitteln. Man kann vielmehr nur diejenige Temperatur angeben, bei der ein schwarzer Strahler die gleiche Energie bzw. Helligkeit aussendet wie der betrachtete Körper. Diese Temperatur heißt kurz die schwarze Temperatur S des Strahlers. — Man bestimmt sie im allgemeinen nicht für die Gesamtstrahlung, da in diesem Fall ihr Zusammenhang mit der wahren Temperatur verwickelt ist. Aber auch für die Teilstrahlung bei einer bestimmten Wellenlänge ist die Beziehung zwischen der wahren und der schwarzen Temperatur nicht immer einwandfrei zu ermitteln.

Ist bei der Wellenlänge λ die Helligkeit J eines schwarzen Körpers der Temperatur T_0 gerade so groß wie die Helligkeit eines andern Körpers von der Temperatur T und dem Absorptionsvermögen A, so gelten nach Gl. (4) und (8) die Beziehungen

$$J = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T_0}} = A_{\lambda,T} c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}$$

oder da nach der Definition der schwarzen Temperatur $S = T_0$ ist,

$$\frac{\lambda}{c_2} \ln A_{\lambda,T} = \frac{1}{T} - \frac{1}{S}. \qquad (12)$$

Bei Kenntnis des Absorptionsvermögens läßt sich mit Hilfe dieser Gleichung die wahre Temperatur aus der schwarzen ableiten. Gleichzeitig erkennt man aus der Gleichung, daß sich bei gegebener wahrer Temperatur T die schwarze Temperatur S mit der Wellenlänge ändert. Man kommt also zu dem sich etwas paradox anhörenden Satz, daß für gewöhnlich die schwarze Temperatur im Rot eine andere sein wird als im Blau.

Für den schwarzen Körper ist bei allen Wellenlängen und allen Temperaturen das Absorptionsvermögen $A_{\lambda,T} = 1$, so daß sich in diesem Falle stets $T = S$ ergibt. Für andere Strahler läßt sich rein theoretisch keine andere Angabe über das Absorptionsvermögen machen als diese, daß sein Betrag zwischen 0 und $+1$ liegen muß. Dementsprechend muß $S \leq T$ sein. Die schwarze Temperatur liefert also einen unteren Grenzwert für die wahre Temperatur. Nur bei sehr kurzen Wellen sind beide Größen auch für einen beliebigen Strahler gleich, vorausgesetzt, daß das Absorptionsvermögen bei sehr kurzen Wellen nicht einen verschwindend kleinen Wert annimmt.

a) Feste undurchsichtige Körper. Das Absorptionsvermögen fester undurchsichtiger Körper kann aus ihrem Reflexionsvermögen abgeleitet werden, da sich beide Größen zu 1 ergänzen. Nun ist das Reflexionsvermögen der Metalle und der Kohle im Gebiet sichtbarer Wellenlängen bis zu sehr hohen Temperaturen von der Temperatur unabhängig, so daß man an Stelle von Gl. (12) setzen kann

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{S} + \frac{\lambda}{c_2} \ln(1 - R_\lambda), \qquad (12a)$$

wenn man mit R das Reflexionsvermögen des Metalles bei Zimmertemperatur bezeichnet. Diese wichtige Gleichung wurde von Holborn und dem Verfasser[1]) aufgestellt und zum erstenmal zur Bestimmung der wahren Temperatur strahlender Metalle angewandt. Über die Änderung des Reflexionsvermögens anderer Körper mit der Temperatur ist noch wenig bekannt.

Eine von Lummer und Pringsheim im Jahre 1899 angegebene und seitdem vielfach zitierte Regel zur Temperaturbestimmung nicht schwarzer fester Strahler kann nicht als einwandfrei gelten. Sie gründet sich auf das Wiensche Verschiebungsgesetz und fordert die Feststellung der Wellenlänge λ_m maximaler Energie. Diese liegt im allgemeinen im Ultrarot, so daß, um sie aufzufinden, dieser Teil des Spektrums bolometrisch durchgemessen werden muß. Die genannten Autoren stellten fest, daß für den schwarzen Körper $\lambda_m T = 2940$ und für blankes Platin $\lambda_m T = 2630$ gilt. Ihre Regel besagt, daß für alle Körper, deren Strahlungseigenschaften zwischen denjenigen des schwarzen Körpers und des blanken Platins liegen, das Produkt $\lambda_m T$ einen Wert zwischen 2940 und 2630 annimmt, und daß somit also ein oberer und ein unterer Grenzwert für die Temperatur des Strahlers angebbar ist. Was unter „Strahlungseigenschaft" verstanden werden soll, wird nicht erläutert. Die Theorie ergibt, wenn man von der Strahlungsgleichung (8) und dem Kirchhoffschen Gesetz Gl. (4) ausgeht,

$$\lambda_m T = \frac{c_2}{5} + \frac{1}{5} \frac{\lambda_m^2 T}{A_{\lambda_m, T}} \cdot \left(\frac{d A_T}{d\lambda}\right)_{\lambda_m}$$

Daraus folgt erstens, daß $\lambda_m T$ nur konstant ist, wenn das Absorptionsvermögen weder von der Temperatur noch von der Wellenlänge abhängt, somit also das Produkt für Platin nicht bei allen Temperaturen den Wert 2630 haben kann, und zweitens, daß $\lambda_m T$ größere oder kleinere Werte als für den schwarzen Körper annimmt, je nachdem $\frac{dA}{d\lambda}$ positiv oder negativ ist.

Im allgemeinen muß man sich bei einem beliebigen Strahler mit der Messung der schwarzen Temperatur begnügen. Wollte man diese mit der wahren Temperatur identifizieren, so müßte man die sehr rohe Annahme machen,

1) L. Holborn u. F. Henning, Berl. Ber. 1905, S. 311—317.

daß der Strahler für die Wellenlänge, bei der die Messung stattfindet, das Absorptionsvermögen 1 besitzt. Dieses Verfahren richtet sich sofort von selbst, da man bei Beobachtung in verschiedenen Farben zu verschiedenen Temperaturen geführt würde. Nun kann man aber einen Schritt weiter gehen, indem man die Voraussetzung macht, daß das Absorptionsvermögen zwar nicht den Wert 1 besitzt, aber doch für zwei möglichst weit voneinander verschiedene Wellenlängen (etwa im roten und blauen Licht) den gleichen Betrag annimmt. Dann gelten nach Gl. (12) die Gleichungen

$$\frac{\lambda_1}{c_2} \ln A = \frac{1}{T} - \frac{1}{S_1} \quad \text{und} \quad \frac{\lambda_2}{c_2} \ln A = \frac{1}{T} - \frac{1}{S_2}$$

aus denen

$$T_g = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) S_1 S_2}{\lambda_2 S_2 - \lambda_1 S_1}$$

folgt. Diese Temperatur T_g heißt die graue Temperatur des betreffenden Körpers. Sie stimmt mit der wahren Temperatur nur dann überein, wenn das Reflexionsvermögen für alle Wellenlängen den gleichen Wert besitzt und der Körper also alles auffallende Licht in unveränderter Zusammensetzung, aber geschwächter Intensität zurückwirft. Die Bedingung der Grauheit ist streng bei keinem Körper erfüllt, sie gilt mit einiger Näherung etwa für Kohle, wenn man sich auf einen nicht sehr ausgedehnten Wellenbereich beschränkt. Für alle Körper, bei denen das Absorptionsvermögen mit zunehmender Wellenlänge abnimmt, wie z. B. bei den Metallen, ist die graue Temperatur T_g ein oberer Grenzwert für die wahre Temperatur.

Der Gedanke liegt nahe, die schwarze Temperatur S bei einer größeren Anzahl, etwa n, verschiedenen Wellenlängen λ zu beobachten, dann für A eine Funktion n—2ten Grades von λ mit $n-1$ empirischen Konstanten aufzustellen und nach Eliminierung dieser Konstanten aus den vorhandenen n-Gleichungen die Temperatur T zu berechnen. Man erhält in diesem Falle für T einen Ausdruck der Form

$$\frac{1}{T} = \Sigma \frac{a_n}{S_n},$$

bei dem die Größen a_n wechselndes Vorzeichen haben und sämtlich (teils sogar sehr erheblich) größer als 1 sind. Jedes der n-Glieder der Summe ist also größer als $\frac{1}{T}$ und da die Meßgenauigkeit von S beschränkt ist, so wird das Ergebnis um so ungenauer, je größer man die Zahl n wählt. Das Verfahren ist bei $n = 3$ bereits praktisch unbrauchbar.

b) Durchsichtige Körper. Die Temperaturmessung leuchtender Flammen und Gase bietet beträchtliche Schwierigkeiten. Führt man in dieselben ein Thermoelement oder Widerstands-Thermometer ein, so ist zu beachten, daß die Drähte infolge der eigenen Ausstrahlung und thermischen Ableitung eine niedrigere Temperatur als die Flamme besitzen. Da die Ausstrahlung der Oberfläche des Drahtes proportional ist, so kann man bei Verwendung von Drähten verschiedenen Durchmessers und Extrapolation auf den Durchmesser 0 zu annähernd richtigen Werten für die Temperatur gelangen.

Auch die Strahlungsmessungen führen nicht auf direktem Wege zum Ziel, denn für die Abhängigkeit des Emissionsvermögens durchsichtiger Körper von der Temperatur sind keine Gesetzmäßigkeiten bekannt. Da aber für durchsichtige Körper das Kirchhoffsche Gesetz von der Gleichheit des Absorptions- und Emissionsvermögens volle Gültigkeit besitzt, so ist folgender zuerst von Kurlbaum angegebener Weg gangbar: Man bringt hinter den Strahler einen schwarzen Körper, dessen Temperatur man so einstellt, daß er in einem bestimmten Wellenlängenbereich durch die Flamme hindurch ebenso hell erscheint als direkt. In diesem Falle sendet die Flamme (wenn man von ihrer geringen Reflexion absieht) gerade soviel Strahlungsenergie aus wie sie vom schwarzen Körper absorbiert. Bezeichnet man mit J die Strahlungsintensität des schwarzen Körpers bei der Temperatur T, ferner mit J' bzw. A die Strahlungsintensität bzw. das Absorptionsvermögen der Flamme, so gilt also die Beziehung $J \cdot A = J'$. Diese Gleichung kann aber nach dem Kirchhoffschen Gesetz Gl. (4) nur bestehen, wenn sich alle drei Größen J', A und J auf die gleiche Temperatur beziehen, d. h. wenn die Flamme die gleiche Temperatur besitzt wie der schwarze Körper.

Von besonderem Interesse ist die Strahlung einer leuchtenden Gasschicht von sehr großer Dicke, wie sie in der Photosphäre der Sonne der Beobachtung zugänglich ist. Man denke sich die Gasschicht, deren Temperatur als homogen angenommen sei, in sehr viele Lamellen zerlegt, deren jede für sich allein die Energie J' emittiert und das Absorptionsvermögen A besitzt. Zur Beobachtung gelangt aus der vordersten Schicht die Energie J', aus der zweiten Schicht nur derjenige Bruchteil, der von der ersten Schicht hindurchgelassen wird, nämlich $J'(1-A)$ usw., aus der n-Schicht die Energie $J'(1-A)^{n-1}$. Summiert man alle diese Energien und setzt man $n = \infty$, so erhält man, indem man bedenkt, daß $1-A$ ein echter Bruch ist, die Strahlung der ganzen Gasmasse zu J'/A. Das ist aber nach dem Kirchhoff-

schen Gesetz die Strahlungsenergie eines schwarzen Körpers von der gleichen Temperatur wie die Gasmasse und der Ausdehnung ihrer vordersten Schicht. Die Photosphäre der Sonne strahlt also als schwarzer Körper, vorausgesetzt, daß man sie als gleichmäßig temperierte Gasschicht von sehr großer Dicke betrachten darf.

(Eingegangen 20. März 1918.)

BESPRECHUNGEN.

G. Bucky, Die Röntgenstrahlen und ihre Anwendung. (Aus Natur und Geisteswelt 556.) 8. 102 S. mit 85 Abb. im Text. Leipzig, B. G. Teubner. 1918. Geb. M. 1.50.

J. Rosenthal, Die Röntgentechnik. 8. 178 S. mit 197 Abb. im Text und 1 phot. Tafel. Leipzig, J. A. Barth. 1918. M. 9.—.

Von den beiden vorliegenden Büchern über Röntgentechnik ist das erste von einem Arzt geschrieben und für den Laien bestimmt. Es ist eine schwierige Aufgabe für einen Arzt, ein physikalisch-technisches Gebiet darzustellen und sie ist auch in diesem Fall nur so weit gelungen, daß das Buch nur bescheidenen Ansprüchen gerecht zu werden vermag.

Das Buch von Rosenthal ist ein Sonderabdruck aus dem von Rieder und Rosenthal herausgegebenen „Lehrbuch der Röntgenkunde", von dem bereits eine „Praktische Röntgenphysik" als Sonderdruck erschienen ist. Es hat drei Hauptabschnitte: die Hochspannungsapparate, die Röntgenröhren und die Hilfsvorrichtungen und Utensilien und beschränkt sich darauf, die technisch wichtigen Fragen darzulegen und in zahlreichen Figuren zu erläutern. Wertvoll sind die praktischen Erfahrungen des Verf., die an vielen Stellen eingefügt worden sind. Das Buch wird dem Physiker, der sich über den heutigen technischen Umfang der Röntgentechnik unterrichten will, von Nutzen sein.

P. Ludewig.

W. Schüle, Leitfaden der technischen Wärmelehre. Kurzes Lehrbuch der Mechanik der Gase und Dämpfe und der mechanischen Wärmelehre. 8. VIII u. 215 S. mit 91 Figuren und 3 Tafeln. Berlin, Julius Springer. 1917. Geb. M. 5.60.

Der vorliegende Leitfaden bildet einen Auszug aus dem I. Band des bekannten Werkes des Verf. „Technische Thermodynamik", welcher vor kurzem die 3. Auflage erlebte. Er gibt in gedrängter Form einen Überblick über das ganze Gebiet, wobei es dem Verf. in geschickter Weise gelungen ist, sich auf das wirklich Wesentliche zu beschränken. Studierende des Maschinenbaues und der technischen Physik werden allerdings zweckmäßigerweise auf das Hauptwerk zurückgreifen; dagegen wird der Leitfaden allen denjenigen, die sich nur vorübergehend mit der Materie zu beschäftigen haben und nur die Grundlagen kennen lernen wollen, viel Zeit und Mühe sparen. Gerade die Grundlagen sind in dem Leitfaden sehr sorgfältig behandelt. Die Absicht des Verf., durch die knappere Darstellungsform den aus dem Felde heimkehrenden Studierenden zu helfen, wird zweifellos erreicht.

Der Leitfaden wird sicherlich von den in Frage kommenden Kreisen gerne benutzt werden, wie ja auch dem Hauptwerk des Verf. in Kreisen seiner speziellen Fachgenossen allgemeine Anerkennung gezollt wird.

Planck.

W. Ostwald, Die wissenschaftlichen Grundlagen der analytischen Chemie. 6. Aufl. gr. 8. XII u. 238 S. mit 3 Figuren im Text. Dresden u. Leipzig, Theodor Steinkopff. 1917. In Pappband geb. M. 10.—.

W. Ostwalds „Wissenschaftliche Grundlagen der analytischen Chemie" gehören nach Form und Inhalt zu den klassischen Schriften der modernen Naturwissenschaft. Die Neuauflage des allgemein bekannten und beliebten Werkes wird deshalb nicht nur von dem engeren Kreis, an den es sich zunächst wendet, sondern darüber hinaus von allen Freunden exakter Naturforschung, die an den Arbeitsmethoden und Ergebnissen der analytischen Chemie ein Interesse nehmen, mit Freude begrüßt werden. Irgendwelche wesentlichen Änderungen gegenüber der vorhergehenden Auflage hat der Verf. nicht vorgenommen. Wie bisher behandelt er im ersten Teil des Buches in 5 Kapiteln (1. Gemenge und ihre Phasen; 2. Lösungen und reine Stoffe; 3. (Physikalische) Scheidung der Lösungsbestandteile; 4. Chemische Scheidung; 5. Die Messung der Stoffe) die Theorie der in der analytischen Chemie benutzten Vorgänge und Erscheinungen, im zweiten in 7 Kapiteln (6. Wasserstoff- und Hydroxylion; 7. Alkalimetalle; 8. Erdalkalimetalle; 9. Eisengruppe; 10. Kupfergruppe; 11. Zinngruppe; 12 Nichtmetalle) ihre Anwendung zur Scheidung der häufigeren Elemente, denen sich dann noch ein 13. Kapitel über die Berechnung der Analysen anschließt. Ein Anhang, in dem sich eine Anzahl anschaulicher und mit einfachen Hilfsmitteln ausführbarer Versuche zur Erläuterung des Vorhergehenden zusammengestellt findet, wird allen denen, die den Inhalt des Buches im Unterricht zu verwerten haben, besonders willkommen sein.

Borsche.

G. Duffing, Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Sammlung Vieweg, Heft 41/42. 8°. 134 S. mit 23 Abbildungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1918. M. 5.— u. Teuerungszuschlag.

Der Nachdruck liegt auf den Titelworten: „bei veränderlicher Eigenfrequenz". Es handelt sich nicht um eine Darstellung der normalen erzwungenen Schwingungen selbst, sondern um eine Weiterbildung dieser Theorie, nicht um ein Lehrbuch, sondern um eine Forschungsarbeit.

Wenn sich auch die Mehrzahl der Schwingungserscheinungen durch das einfache Bild der erzwungenen Schwingungen hinreichend genau darstellen läßt, so mehren sich doch die Fälle, die in diesen engen Rahmen nicht mehr hineinpassen. Vielfach treten ganz eigentümliche, neuartige Erscheinungen auf: Unter ganz gleichen äußeren Bedingungen sind zwei ganz verschiedene Betriebszustände möglich; beim Übergang von tiefen zu hohen Frequenzen stellen sich andere Zustände ein, wie beim Übergang von hohen zu tiefen Frequenzen und ähnliches mehr. Elektromagnetische Schwingungskreise mit Eisen, synchrone Drehstrommaschinen bei Parallelbetrieb, Resonanzschwingungen rasch laufender Maschinen, das gewöhnliche Kreispendel bei größeren Ausschlägen zeigen solche Erscheinungen.

Der Verf. sucht auf streng mathematischem Wege tiefer in dies noch wenig erforschte Gebiet einzudringen. Der erste Teil behandelt kurz die normalen harmonischen Schwingungen, um an ihnen die Rechenoperationen, die zur Lösung der Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \chi\frac{dx}{dt} + \alpha x = R(t)$$

erforderlich sind, ins Gedächtnis zurückzurufen. Der Verf. gibt zum Schluß auch eine neue Lösung, die für eine beliebige periodische Funktion $R(t)$ gültig ist. Der zweite, Hauptteil behandelt die „pseudoharmonischen Schwingungen"; es wird nach der Lösung der erweiterten Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \chi\frac{dx}{dt} + \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 = k \sin w t$$

gesucht. Trotz der Beschränkung auf sinusförmige äußere Kraft gelingt dies zunächst nur für ein dämpfungsfreies System ($\chi = 0$) und unter der Voraussetzung, daß die zusätzlichen Restitutionskräfte ($-\beta x^2 - \gamma x^3$) klein sind, und auch da ist ein erheblicher Rechenaufwand und die Anwendung elliptischer Funktionen erforderlich. Das war bei den verwickelten Erscheinungen, die durch die Lösung wiedergegeben werden sollen, auch nicht anders zu erwarten. Die klare Darstellung des Verfassers, die Entwicklung des Schwierigen aus dem Einfachen, das Hervorheben der wichtigsten Ergebnisse nach jeder längeren Rechnung erleichtern das Verständnis sehr. Dem gleichen Zwecke dienen verschiedene Rechenbeispiele und der dritte Teil, der vom Verfasser angestellte Versuche am Kreispendel enthält, die die Rechnungen bestätigen. Die weiteren Teile bilden Ergänzungen zum zweiten Teil: „Einfluß der Dämpfung, Stabilität der Bewegung, Technische Bedeutung, Verallgemeinerungen". Ein Anhang enthält Formeln über elliptische Funktionen und einige Rechenoperationen, die im Text den Gedankengang zu sehr unterbrochen hätten.

Für Physiker, die vor schwierigen mathematischen Rechnungen keine Scheu haben und für alle, die sich mit diesem Spezialgebiet eingehend befassen wollen, wird das Buch eine wichtige Erweiterung ihres Wissensgebietes bilden. Barkhausen.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Delft Dr. F. E. C. Scheffer für physikalische Chemie.

Ernannt: An der Technischen Hochschule Delft Dr. J. van der Berg zum Lektor für analytische Chemie und Dr. F. Gondrian zum Lektor für analytische Chemie, der Privatdozent an der Universität Berlin und Mitglied der Physikalisch-technischen Reichsanstalt Professor Dr. Eduard Grüneisen zum a. o. Professor für mathematische Physik an der Universität Marburg, Professor W. O. Walker an der Queens University Kanada zum ord. Professor der Chemie an der Mc Master University in Toronto (an Stelle des verstorbenen Dr. J. Bishop Tingle), der ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Max v. Laue in gleicher Eigenschaft an der Universität Berlin, der a. o. Professor an der Universität Berlin Dr. Max Born zum ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Frankfurt a. M.

Verliehen: Dem Privatdozenten für Astronomie und Meteorologie an der Technischen Hochschule Danzig Dr. Albert v. Brunn, dem Privatdozenten für Astronomie und angewandte Mathematik an der Universität Freiburg i. B. Ernst August Ansel, dem Privatdozenten der Physik an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Marzello Pirani, dem Mitglied des Kaiser-Wilhelm-Instituts für physikalische Chemie Dr. Friedrich Epstein in Berlin-Dahlem sowie dem ständigen Mitgliede des Material-Prüfungsamts Dr. Werner Mecklenburg in Berlin-Dahlem der Titel Professor.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor der Chemie an der Universität Moskau Dr. Iwan Plotnikow (infolge Übernahme der Leitung des wissenschaftlichen photochemischen Laboratoriums bei der Aktien-Gesellschaft für Anilin-Fabrikation in Berlin).

In den Ruhestand: Der a. o. Professor der Mathematik an der Universität Jena Hofrat Dr. Gottlob Frege, der ord. Professor der anorganischen Chemie an der Technischen Hochschule Trondhjem Dr. P. Farup (wegen Krankheit).

Gestorben: Der ord. Professor der Physik und angewandten Elektrizitätslehre an der Universität Göttingen und Mitbegründer dieser Zeitschrift Geh. Regierungsrat Dr. Hermann Th. Simon, der Vorsitzende der Frankfurter chemischen Gesellschaft Professor Carl Theodor Petersen.

Gesuche.

Physiker,

Dr. phil., bisher im Ausland tätig, sucht Assistentenstelle an einer Universität zwecks späterer Habilitation. Angebote unter **E. O. C.** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstraße 2 erbeten.

Promovierter Physiker,

bisher im Heeresdienste als Leiter einer Instrumentenbeschaffungsstelle und eines Prüfungslaboratoriums tätig, sucht passende Stellung. Angebote mit Gehaltsangabe unter **S. H. 1002** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstr. 2 erbeten.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.